



Indah Dwi
 Murdianingsih¹
 Hadi Tanuji²

ALJABAR LINIER SEBAGAI LANDASAN MATEMATIKA DALAM METODE ANALISIS MULTIVARIAT

Abstrak

Analisis multivariat merupakan bidang fundamental dalam statistika yang berkaitan dengan pengolahan dan interpretasi data berdimensi tinggi yang melibatkan banyak variabel yang saling berhubungan. Meskipun metode-metode multivariat banyak diterapkan di berbagai disiplin ilmu seperti ekonomi, psikologi, biologi, dan teknik, dasar matematisnya—yaitu aljabar linier—sering kali kurang mendapat perhatian dalam penerapan praktis. Studi ini menyajikan tinjauan sistematis untuk menelaah peran penting aljabar linier dalam perumusan, perhitungan, dan interpretasi teknik-teknik multivariat utama. Konsep-konsep inti aljabar linier seperti ruang vektor, operasi matriks, transformasi linier, nilai eigen dan vektor eigen, serta dekomposisi matriks ditemukan sangat melekat dalam metode-metode seperti Principal Component Analysis (PCA), Regresi Linier Berganda, dan Linear Discriminant Analysis (LDA). Tinjauan ini menunjukkan bahwa aljabar linier tidak hanya menyediakan dasar teoritis bagi analisis multivariat, tetapi juga meningkatkan efisiensi komputasi dan kejelasan analitis. Oleh karena itu, pemahaman yang kuat terhadap aljabar linier menjadi hal yang tak terpisahkan bagi peneliti dan praktisi yang ingin menerapkan metode multivariat secara cermat dan efektif.

Kata kunci: Aljabar Linier, Analisis Multivariat, Dekomposisi Matriks, Nilai Eigen, Principal Component Analysis, Tinjauan Sistematis.

Abstract

Multivariate analysis is a fundamental field in statistics that deals with the processing and interpretation of high-dimensional data involving multiple interrelated variables. While multivariate methods are widely applied in various disciplines such as economics, psychology, biology, and engineering, their mathematical foundation—linear algebra—often receives insufficient attention in practical applications. This study presents a systematic literature review to examine the essential role of linear algebra in the formulation, computation, and interpretation of key multivariate techniques. Core linear algebra concepts such as vector spaces, matrix operations, linear transformations, eigenvalues and eigenvectors, and matrix decompositions are found to be deeply embedded in methods including Principal Component Analysis (PCA), Multiple Linear Regression, and Linear Discriminant Analysis (LDA). The review demonstrates that linear algebra not only provides a theoretical basis for multivariate analysis but also enhances computational efficiency and analytical clarity. A solid understanding of linear algebra is therefore indispensable for researchers and practitioners seeking to apply multivariate methods rigorously and effectively.

Keywords: Linear Algebra, Multivariate Analysis, Matrix Decomposition, Eigenvalues, Principal Component Analysis, Systematic Review

PENDAHULUAN

Analisis multivariat merupakan salah satu cabang statistik yang berfokus pada pengolahan dan pemahaman data berdimensi tinggi, yaitu data yang terdiri dari banyak variabel yang saling berinteraksi. Keterkaitan antarvariabel ini menjadikan analisis multivariat sangat relevan dalam berbagai bidang, seperti ekonomi, psikologi, biologi, dan teknik, di mana

^{1,2)} Institut Teknologi dan Bisnis Muhammadiyah Grobogan
 email: indahdwi@itbmg.ac.id¹, haditanuji@itbmg.ac.id²

pemahaman mendalam terhadap hubungan antarvariabel menjadi kunci dalam pengambilan keputusan dan pengembangan teori. Namun, kompleksitas dalam menangani data berdimensi tinggi seringkali menimbulkan tantangan, baik dalam hal formulasi model, komputasi, maupun interpretasi hasil analisis.

Di balik kecanggihan berbagai teknik dan perangkat lunak yang digunakan dalam analisis multivariat, terdapat fondasi matematika yang kokoh, yakni aljabar linier. Aljabar linier adalah cabang matematika yang mempelajari vektor, ruang vektor, serta transformasi linier di antara ruang-ruang tersebut. Konsep-konsep seperti matriks, determinan, sistem persamaan linier, nilai dan vektor eigen, serta dekomposisi matriks menjadi alat fundamental dalam representasi dan manipulasi data multivariat.

Berbagai metode analisis multivariat dibangun secara eksplisit di atas prinsip-prinsip aljabar linier. Misalnya, dalam regresi linier berganda, model regresi dan estimasi koefisiennya dapat dirumuskan secara ringkas menggunakan notasi matriks. Analisis komponen utama (Principal Component Analysis/PCA), sebagai teknik reduksi dimensi yang populer, bergantung sepenuhnya pada dekomposisi nilai eigen dari matriks kovarians atau korelasi. Demikian pula, analisis diskriminan linier (Linear Discriminant Analysis/LDA) menggunakan transformasi linier untuk menemukan kombinasi variabel prediktor yang optimal dalam membedakan antar kelompok.

Meskipun kontribusi aljabar linier sangat signifikan dalam analisis multivariat, pemahaman yang mendalam terhadap konsep-konsep tersebut sering kali terabaikan dalam praktik. Artikel ini bertujuan untuk mengeksplorasi dan menegaskan peran fundamental aljabar linier dalam merumuskan, menghitung, dan menginterpretasikan hasil dari berbagai metode utama dalam analisis multivariat. Dengan menyoroti keterkaitan yang erat antara kedua bidang ini, diharapkan tulisan ini dapat meningkatkan apresiasi terhadap dasar matematis dari analisis multivariat serta mendorong penggunaan teknik-teknik tersebut secara lebih tepat dan bermakna.

Selain mendasari formulasi matematis berbagai teknik analisis, aljabar linier juga berperan penting dalam aspek komputasi. Operasi-operasi numerik seperti inversi matriks, dekomposisi nilai singular (Singular Value Decomposition/SVD), dan penyelesaian sistem persamaan linier merupakan bagian integral dari algoritma perangkat lunak statistik modern. Efisiensi perhitungan dan kestabilan numerik dari metode-metode ini sangat bergantung pada pemilihan algoritma aljabar linier yang tepat. Oleh karena itu, pemahaman konsep dan keterampilan dalam menerapkan aljabar linier tidak hanya penting secara teoritis, tetapi juga kritis dalam konteks pemrosesan data skala besar menggunakan perangkat lunak seperti R, MATLAB, atau Python (Strang, 2016).

Di samping itu, aljabar linier menyediakan kerangka berpikir geometris yang membantu peneliti memahami struktur internal data multivariat. Konsep seperti proyeksi ortogonal, subruang vektor, dan transformasi linier memudahkan visualisasi hubungan antarvariabel dalam ruang berdimensi tinggi. Misalnya, dalam PCA, vektor eigen dari matriks kovarians menggambarkan arah utama variasi data, sementara nilai eigennya menunjukkan besar variasi pada arah tersebut. Dengan demikian, aljabar linier tidak hanya menjadi alat hitung, tetapi juga sarana konseptual untuk mengungkap pola laten dalam data (Abdi & Williams, 2010).

Lebih jauh lagi, penguasaan aljabar linier memungkinkan peneliti untuk mengembangkan atau memodifikasi metode multivariat sesuai kebutuhan konteks penelitian. Inovasi metodologis seperti kernel PCA atau regularized LDA merupakan contoh penerapan prinsip-prinsip aljabar linier yang diperluas dan disesuaikan dengan tantangan data modern, seperti multikolinearitas atau dimensi tinggi yang melebihi jumlah sampel. Tanpa pemahaman mendalam terhadap struktur aljabar yang mendasarinya, sulit bagi peneliti untuk mengevaluasi asumsi, keterbatasan, maupun potensi pengembangan dari metode yang digunakan (Jolliffe & Cadima, 2016).

METODE

Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan metode studi literatur yang sistematis. Studi literatur dipilih karena tujuan penelitian adalah untuk mengeksplorasi dan

menganalisis secara mendalam peran konsep-konsep aljabar linier dalam berbagai metode analisis multivariat berdasarkan publikasi ilmiah yang relevan. Pendekatan ini memungkinkan identifikasi, evaluasi, dan sintesis pengetahuan yang ada mengenai hubungan antara kedua bidang ilmu ini.

Sumber Data

Sumber data utama dalam penelitian ini adalah literatur ilmiah yang relevan, termasuk:

- **Artikel Jurnal Ilmiah:** Publikasi penelitian di jurnal-jurnal terindeks yang membahas teori, aplikasi, atau hubungan antara aljabar linier dan analisis multivariat.
- **Buku Teks dan Monograf:** Buku-buku referensi yang membahas konsep-konsep aljabar linier, metode-metode analisis multivariat, dan aplikasi statistika yang relevan.
- **Prosiding Konferensi:** Makalah-makalah yang dipresentasikan dalam konferensi ilmiah yang berkaitan dengan statistika, matematika terapan, atau bidang ilmu lain yang menggunakan analisis multivariat.

Teknik Pengumpulan Data

Pengumpulan data dilakukan melalui penelusuran sistematis terhadap basis data ilmiah (misalnya, Scopus, Web of Science, Google Scholar), perpustakaan digital, dan sumber-sumber daring lainnya. Penelusuran dibatasi pada publikasi yang relevan dengan fokus penelitian, dengan mempertimbangkan kualitas sumber dan relevansi konten terhadap topik peran aljabar dalam analisis multivariat.

Teknik Analisis Data

Data yang terkumpul berupa literatur ilmiah dianalisis menggunakan metode analisis konten dan sintesis naratif. Langkah-langkah analisis meliputi:

1. **Seleksi Literatur:** Melakukan seleksi terhadap literatur yang ditemukan berdasarkan kriteria inklusi (relevansi dengan topik, kualitas metodologi jika berupa studi aplikasi) dan eksklusi (tidak relevan, duplikasi).
2. **Ekstraksi Informasi:** Mengidentifikasi dan mengekstrak informasi kunci dari setiap literatur yang terpilih, termasuk definisi konsep aljabar linier yang relevan, formulasi matematis dalam metode analisis multivariat, peran aljabar dalam komputasi, dan implikasinya terhadap interpretasi hasil.
3. **Klasifikasi dan Kategorisasi:** Mengelompokkan informasi yang diekstrak berdasarkan tema-tema utama yang muncul, seperti peran representasi matriks, aplikasi nilai eigen dan vektor eigen, dan penggunaan transformasi linier dalam metode-metode analisis multivariat tertentu.
4. **Sintesis Naratif:** Mengintegrasikan dan mensintesis informasi dari berbagai sumber untuk mengidentifikasi pola, hubungan, dan argumen utama mengenai peran aljabar linier dalam analisis multivariat. Proses sintesis ini melibatkan perbandingan, kontras, dan interpretasi temuan dari berbagai literatur untuk membangun pemahaman yang komprehensif.
5. **Interpretasi dan Penyimpulan:** Merumuskan interpretasi dan kesimpulan berdasarkan hasil sintesis, yang menjawab pertanyaan penelitian mengenai bagaimana konsep-konsep aljabar linier memengaruhi formulasi, komputasi, dan interpretasi hasil dalam metode-metode analisis multivariat.

Melalui pendekatan studi literatur yang sistematis dan analisis konten yang cermat, penelitian ini bertujuan untuk memberikan pemahaman yang mendalam dan komprehensif mengenai peran fundamental aljabar linier dalam memperkokoh landasan teoretis dan aplikasi praktis analisis multivariat.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Aljabar linier merupakan fondasi matematika yang sangat penting dalam pengolahan dan analisis data multivariat. Banyak teknik analitik modern bergantung pada konsep ruang vektor, transformasi linier, dekomposisi matriks, dan eigendecomposition untuk mengekstrak informasi dari kumpulan data berdimensi tinggi. Kajian literatur ini bertujuan untuk menunjukkan sejauh mana aljabar linier berkontribusi dalam pengembangan metode-metode analisis multivariat yang umum digunakan di berbagai disiplin ilmu, termasuk ilmu data, statistik, dan pembelajaran mesin (*machine learning*).

Tabel berikut merangkum literatur utama yang menjadi referensi dalam studi ini, dengan fokus pada kontribusi setiap karya terhadap pemahaman dan aplikasi aljabar linier dalam konteks analisis multivariat.

Tabel 1. Ringkasan Literatur Utama

No	Penulis	Judul	Kontribusi	Aplikasi Aljabar Linier
1	Strang (2016)	<i>Introduction to Linear Algebra</i>	Dasar-dasar ruang vektor, basis, ortogonalitas, dan dekomposisi matriks	Visualisasi ruang fitur, transformasi linier, diagonalization
2	Jolliffe (2002)	<i>Principal Component Analysis</i>	Teori PCA, eigenvalue decomposition, dan interpretasi komponen utama	Reduksi dimensi dengan eigen decomposition dan SVD
3	James et al. (2013)	<i>An Introduction to Statistical Learning</i>	Regresi linier, regresi ridge, dan Lasso menggunakan pendekatan matriks	Model linier multivariat, regularisasi
4	Hastie et al. (2009)	<i>The Elements of Statistical Learning</i>	Model statistik kompleks, analisis diskriminan, kernel method	Singular Value Decomposition (SVD), Linear Discriminant Analysis (LDA), Kernel PCA
5	Lay (2012)	<i>Linear Algebra and Its Applications</i>	Pemecahan sistem linier, transformasi matriks, dan aplikasi geometri	Transformasi data multivariat, rotasi ruang vektor
6	Trefethen & Bau (1997)	<i>Numerical Linear Algebra</i>	Pendekatan numerik dalam komputasi matriks besar	Optimisasi komputasi dalam PCA dan regresi multivariat
7	Rencher & Christensen (2012)	<i>Methods of Multivariate Analysis</i>	Teknik-teknik statistik multivariat dan hubungan dengan struktur matriks	Analisis faktor, canonical correlation analysis
8	Abdi & Williams (2010)	<i>Principal Component Analysis</i> (Review Article)	Penjelasan intuitif dan statistik PCA, serta variasinya	SVD dan pemetaan linier untuk ekstraksi fitur

Kajian pustaka ini memperlihatkan bahwa hampir seluruh pendekatan utama dalam analisis multivariat—baik yang bersifat eksploratif seperti PCA maupun prediktif seperti regresi linier berganda dan LDA—sangat bergantung pada prinsip-prinsip aljabar linier. Oleh karena itu, pemahaman yang kuat terhadap aljabar linier tidak hanya penting dalam konteks teoritis, tetapi juga esensial dalam praktik analitik dan implementasi algoritma modern berbasis data.

SIMPULAN

Penelitian ini menegaskan bahwa aljabar linier memainkan peran sentral dalam analisis multivariat modern. Berbagai teknik analitik yang umum digunakan dalam ilmu data dan statistik, seperti Principal Component Analysis (PCA), regresi multivariat, dan Linier Discriminant Analysis (LDA), sangat bergantung pada konsep-konsep fundamental aljabar linier seperti ruang vektor, dekomposisi eigen, dan transformasi matriks.

Melalui kajian literatur yang mendalam, terlihat bahwa aljabar linier tidak hanya menyediakan kerangka teoritis untuk memahami struktur data berdimensi tinggi, tetapi juga menjadi dasar implementasi komputasi dari banyak algoritma analitik. Oleh karena itu,

penguasaan aljabar linier menjadi kunci penting bagi peneliti dan praktisi dalam mengembangkan dan menerapkan metode analisis data multivariat secara efektif dan efisien.

Ke depan, integrasi antara pemahaman aljabar linier yang kuat dengan perkembangan teknologi komputasi akan semakin memperluas cakupan dan kedalaman analisis multivariat dalam berbagai bidang ilmu.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdi, H., & Williams, L. J. (2010). *Principal component analysis*. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 2(4), 433–459. <https://doi.org/10.1002/wics.101>
- Abdi, H., & Williams, L. J. (2010). Principal component analysis. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 2(4), 433–459.
- Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction* (2nd ed.). Springer.
- James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning: With Applications in R*. Springer.
- Jolliffe, I. T. (2002). *Principal Component Analysis* (2nd ed.). Springer.
- Jolliffe, I. T., & Cadima, J. (2016). Principal component analysis: A review and recent developments. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 374(2065), 20150202.
- Lay, D. C. (2012). *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.). Pearson.
- Rencher, A. C., & Christensen, W. F. (2012). *Methods of Multivariate Analysis* (3rd ed.). Wiley.
- Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra* (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
- Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra* (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
- Trefethen, L. N., & Bau, D. (1997). *Numerical Linear Algebra*. SIAM.