Jurnal Review Pendidikan dan Pengajaran
http://journal.universitaspahlawan.ac.id/index.php/jrpp
Volume 7 Nomor 4, 2024
P-2655-710X e-ISSN 2655-6022

Submitted : 29/11/2024
Reviewed : 01/12/2024
Accepted : 02/12/2024
Published : 05/12/2024

Suci Frisnoiry[1]
Tiara Fatima Tuzzahra[2]
Titin Yemina Letare Pasaribu[3]
Tria Dita Utami[4]
Tricinta Yospin Wina Harianja[5]
Yasmin Risha Fadhilah[6]

SEJARAH GEOMETRI : EUCLID HINGGA KONSEP GEOMETRI MODERN

Abstrak
Penelitian ini bertujuan untuk menelusuri perkembangan geometri mulai dari kontribusi Euclid pada era kuno hingga geometri modern yang mencakup penerapan dalam era digital. Menggunakan pendekatan kualitatif dengan metode kajian pustaka, penelitian ini mengumpulkan dan menganalisis sumber-sumber primer dan sekunder yang relevan. Bagian awal membahas sumbangan Euclid dalam "The Elements" yang menetapkan dasar geometri Euclidean, dengan fokus pada definisi, postulat, dan teorema yang berperan penting dalam matematika selama berabad-abad. Selanjutnya, penelitian ini mengeksplorasi kemunculan geometri non-Euclidean, seperti geometri hiperbolik dan eliptik, yang didorong oleh ketidaksesuaian pada postulat kesejajaran Euclid. Di era modern, transformasi ini telah memicu berbagai aplikasi dalam teknologi digital, seperti grafika komputer, simulasi ruang, dan algoritma navigasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pergeseran dari geometri Euclidean menuju non-Euclidean mengubah paradigma dalam matematika dan teknologi, menjadikannya relevan dalam perkembangan ilmu pengetahuan masa kini.
Kata Kunci : Geometri Euclidean, Geometri Non-Euclidean, Euclid, Perkembangan Geometri

Abstract
This study aims to trace the development of geometry from Euclid's contributions in ancient times to modern geometry, including applications in the digital age. Using a qualitative approach through literature review, this research collects and analyzes relevant primary and secondary sources. The initial section examines Euclid's foundational work in The Elements, which established the basis of Euclidean geometry, focusing on definitions, postulates, and theorems that have been pivotal in mathematics for centuries. Subsequently, the study explores the emergence of non-Euclidean geometry, such as hyperbolic and elliptic geometries, arising from the limitations of Euclid’s parallel postulate. In the modern era, this transformation has fostered diverse applications in digital technology, including computer graphics, spatial simulations, and navigation algorithms. The findings indicate that the shift from Euclidean to non-Euclidean geometry reshaped paradigms in mathematics and technology, making it integral to contemporary scientific and technological advancement.
Keyword : Euclidean Geometry, Non-Euclidean Geometry, Euclid, Geometry Development.

PENDAHULUAN

Geometri merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang paling tua dan fundamental. Sebagai disiplin yang mempelajari bentuk, ukuran, posisi relatif dari figur-figur, serta sifat-sifat ruang, geometri memiliki peran penting dalam perkembangan matematika secara

[1,2,3,4,5,6)] Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Medan
email: sucifrisnoiry@unimed.ac.id[1], tiaratuzzahra@gmail.com[2], pasaributitin2019@gmail.com[3], ditautamitria@gmail.com[4], tricintaywharianja@gmail.com[5], yasminfadhilah04@gmail.com[6].

keseluruhan. Sejak zaman kuno, para matematikawan dan filsuf telah menjadikan geometri sebagai salah satu bidang studi utama karena kemampuannya untuk memberikan pemahaman mendalam tentang dunia fisik dan hubungan antarobjek. Di dunia modern, geometri tidak hanya berperan dalam matematika murni, tetapi juga menjadi dasar bagi banyak ilmu terapan, seperti fisika, arsitektur, astronomi, hingga teknologi komputer.

Perkembangan geometri dimulai dari zaman Mesir dan Babilonia kuno, di mana perhitungan sederhana terkait luas dan volume digunakan untuk memenuhi kebutuhan praktis, seperti pengukuran lahan pertanian dan konstruksi bangunan. Bangsa Yunani, terutama melalui karya-karya Euclid dalam "Elements", membawa geometri ke tahap yang lebih abstrak dan sistematis, menjadikannya disiplin yang bersifat deduktif. Seiring berjalannya waktu, geometri mengalami evolusi yang pesat, terutama pada masa Renaisans, dengan diperkenalkannya geometri analitik oleh René Descartes dan pengembangan geometri non-Euclidean oleh Gauss, Lobachevsky, dan Bolyai di abad ke-19. Di era modern, geometri berintegrasi dengan aljabar melalui bidang geometri aljabar dan menjadi elemen kunci dalam perkembangan teori relativitas dan fisika kuantum.

Dalam kehidupan sehari-hari, geometri memiliki peran yang sangat vital. Setiap aktivitas yang melibatkan pengukuran ruang, baik dalam konteks bangunan, navigasi, desain, maupun teknologi, tidak lepas dari konsep-konsep geometri. Misalnya, arsitektur modern menggunakan prinsip-prinsip geometri untuk merancang struktur yang kuat dan estetis. Selain itu, teknologi grafis komputer yang mendukung visualisasi 3D, game, dan animasi sangat bergantung pada penerapan geometri dalam representasi bentuk dan ruang.

Tujuan dari penulisan jurnal ini adalah untuk menjelaskan lebih lanjut peran dan perkembangan geometri dalam matematika dan kehidupan sehari-hari. Melalui pembahasan ini, diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai bagaimana geometri berkembang dari masa ke masa dan bagaimana aplikasi geometri modern memengaruhi berbagai aspek kehidupan manusia. Selain itu, jurnal ini bertujuan untuk menyoroti pentingnya geometri sebagai fondasi bagi berbagai disiplin ilmu dan teknologi yang kita gunakan saat in

METODE

1. Pendekatan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif, yang berfokus pada analisis deskriptif terhadap perkembangan konsep geometri mulai dari masa Euclid hingga konsep geometri non-Euclidean dan penerapannya dalam era modern.

2. Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang dilakukan adalah studi literatur. Penelitian ini mengumpulkan, mengkaji, dan menganalisis berbagai literatur yang relevan mengenai perkembangan geometri. Fokus utamanya adalah pada sumber primer dan sekunder yang membahas kontribusi Euclid dan evolusi geometri menuju konsep non-Euclidean dan aplikasinya.

3. Sumber Data

Data yang digunakan adalah data sekunder, yang diperoleh dari buku, jurnal ilmiah, artikel, dan literatur lain yang relevan dengan sejarah dan perkembangan geometri. Beberapa literatur utama yang digunakan meliputi karya Euclid "The Elements," serta literatur modern yang membahas konsep geometri non-Euclidean dan aplikasinya.

4. Prosedur Pengumpulan Data

Prosedur pengumpulan data dilakukan melalui langkah-langkah berikut:

a. Mengidentifikasi literatur yang relevan berdasarkan topik sejarah geometri, khususnya karya Euclid, geometri non-Euclidean, dan konsep modern.
b. Melakukan seleksi dan telaah terhadap sumber-sumber yang dianggap paling kredibel dan relevan, baik dalam konteks sejarah maupun perkembangan konsep geometri hingga saat ini.
c. Mengkategorikan data berdasarkan tema, seperti kontribusi Euclid, postulat kesejajaran, dan perkembangan geometri non-Euclidean.

5. Prosedur Analisis Data

Data dianalisis secara deskriptif dengan tahapan berikut:

d. Membaca dan memahami materi dari setiap literatur yang relevan.

e. Membandingkan pandangan dari berbagai tokoh matematikawan terkait postulat Euclid dan pembentukan geometri non-Euclidean.
f. Menganalisis konflik kognitif dan konsep-konsep yang berbeda di antara geometri Euclidean, hiperbolik, dan eliptik.
g. Menyusun rangkuman dan interpretasi dari data yang terkumpul untuk memberikan pemahaman holistik mengenai perkembangan konsep geometri dari masa Euclid hingga era modern.

6. Instrumen Penelitian

Dalam penelitian ini, instrumen yang digunakan adalah panduan telaah literatur yang meliputi kriteria penentuan sumber yang relevan, kriteria validitas literatur, dan panduan untuk mengkategorikan konsep-konsep geometri yang dibahas.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Geometri Kuno

Geometri merupakan salah satu ilmu tertua dikarenakan ilmu geometri telah ada sejak zaman Mesir Kuno sekitar 3.000 SM. Pada saat itu, pengetahuan geometri masih terbatas pada pengukuran panjang segmen garis, luas daerah, dan volume sehingga hanya digunakan untuk membangun irigasi, bangunan-bangunan kuno, dan lainnya. Bangsa Mesir Kuno menggunakan rumus $\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$ untuk menghitung luas daerah sembarang segiempat yang panjang sisi-sisinya berturut-turut adalah a, b, c, dan d.

Peradaban zaman dulu telah memiliki pengetahuan tentang irigasi, drainase dan dapat mendirikan bangunan-bangunan raksasa yang tertinggal di masa kini. Prasasti kuno yang menyangkut geometri ditemukan di Mesir, India, hingga China.

Berikut ini merupakan beberapa pemikiran ilmu geometri dari beberapa peradaban:

1. Mesopotamia
   a. Menemukan sistem berat dan ukur
2. Babilonia
   a. Menggunakan sistem desimal dan $\pi = 3{,}125$ atau $\frac{22}{7}$.
   b. Mengenal geometri sebagai basis perhitungan astronomi
   c. Menggunakan pendekatan untuk akar kuadrat
   d. Geometrinya bersifat aljabaris
   e. Sudah mengenal teorema Pythagoras
3. Mesir Kuno
   a. Sudah mengenal rumus untuk menghitung luas dan isi
   b. Mengenal tripel Pythagoras
4. Yunani Kuno
   a. Pythagoras membuktikan teorema Pythagoras secara matematis
   b. Archimedes mencetuskan nama parabola, yang artinya bagian sudut kanan kerucut
   c. Archimedes membuat geometri bidang datar
5. India
   a. Aryabtha (4018 SM) menemukan hubungan keliling sebuah lingkaran
   b. Geometrinya sudah mengenal tripel pythagoras, teorema Pythagoras, transformasi dan segitiga pascal.
6. China
   a. Mengenal sifat-sifat segitiga siku-siku tahun 3.000 SM
   b. Mengembangkan angka negatif, bilangan desimal, sistem desimal, sistem biner, aljabar, geometri, trigonometri dan kalkulus
   c. Telah menemukan metode untuk memecahkan beberapa jenis persamaan yaitu persamaan kuadrat, kubik, dan qualitik
   d. Aljabarnya menggunakan sistem horner untuk menyelesaikan persamaan kuadrat.

Berikut ini merupakan Tokoh-Tokoh Geometri:

1. Thales (624-550 SM)

Thales merupakan seseorang yang mencoba menggambarkan atau memberikan penjelasan secara rasional tentang dunia ini yang mana sebelumnya hanya kepercayaan mitos yang ada dan tokoh pertama yang memulai studi geometri secara formal. Kontribusi yang paling utama dari Thales adalah kemampuannya dalam mengabstraksikan ide dari hal yang kontekstual ke formal.

Adapun teorema dari Thales yaitu:

a. Lingkaran dibagi 2 oleh garis yang melalui pusatnya yang disebut dengan diameter.
b. Besarnya sudut-sudut alas segitiga sama kaki adalah sama besar.
c. Sudut-sudut vertikal yang terbentuk dari 2 garis sejajar yang dipotong oleh sebuah garis lurus menyilang, sama besarnya.
d. Kedua segitiga dikatakan sama dan sebangun (kongruen) apabila sepasang sisinya, sepasang sudut yang terletak pada sisi itu dan sepasang sudut yang terletak dihadapan sisiitu sama besarnya.
e. Segitiga dengan alas diketahui dan sudut tertentu dapat digunakan untuk mengukur jarak kapal.

2. Pythagoras (580-475 SM)

Pythagoras dikenal sebagai “Bapak Bilangan”. Kontribusi yang terkenal dari Pythagoras adalah tentang teorema untuk segitiga siku-siku yang biasanya disebut dengan teorema Pythagoras.

Adapun teorema dari Pythagoras yaitu:

a. Jumlah luas bujur sangkar pada kaki sebuah segitiga siku-siku sama dengan luas bujur sangkar di hipotenus.

3. Eudoxus (408-355 SM)

Diyakini bahwa kontribusi Eudoxus merupakan dasar dari buku V, VI, dan XII dari buku Elements karya Euclid. Selain itu dia mampu memecahkan bilangan tak terukur pada masa Pythagoras. Dalam bidang matematika, Eudoxus memperkenalkan hal baru mengenai perbandingan seharga.

4. Euclid (325-265 SM)

Euclid dijuluki sebagai “Bapak Geometri” karena perannya dalam menyusun karya klasik Elements yang mendokumentasikan, menyusun, dan menyempurnakan pengetahuan geometris dan matematika pada zamannya. Karya ini menjadi landasan bagi geometri Euclidean dan menjadi buku teks standar selama berabad-abad di dunia Barat maupun Timur. Buku “The Elements” terdiri dari 13 buku yang tersusun berdasarkan tema dan topik. Dan terdiri dari 467 proposisi. Garis besar isi masing-masing buku yaitu:

a. Buku I : Dasar-dasar Geometri : Teori Segitiga, Sejajar dan Luas
b. Buku II : Aljabar Geometri
c. Buku III : Teori-teori tentang Lingkaran
d. Buku IV : Cara membuat garis dan gambar melengkung
e. Buku V : Teori tentang proporsi-proporsi abstrak
f. Buku VI : Bentuk yang sama dan proporsi-proporsi dalam geometri
g. Buku VII : Dasar-dasar Teori Angka
h. Buku VIII : Proporsi-proporsi lanjutan dalam Teori Angka
i. Buku IX : Teori Angka
j. Buku X : Klasifikasi
k. Buku XI : Geometri Tiga Dimensi
l. Buku XII : Mengukur Bentuk-bentuk
m. Buku XIII : Bentuk-bentuk Tri-Matra (tiga dimensi)

Pada buku I terdapat 5 postulat yang merupakan pernayataan dasar yang menyusun seluruh geometri Eulidean. Lima Postulat Euclid ini adalah :

1. Postulat Pertama
   "Dapat ditarik garis lurus antara dua titik."
   Artinya, dua titik di ruang dapat dihubungkan oleh satu garis lurus.
2. Postulat Kedua
   "Garis lurus yang terbatas dapat diperpanjang tanpa batas.”
   Garis lurus dapat diperpanjang terus ke segala arah.
3. Postulat Ketiga
   "Dengan sebuah titik pusat dan jari-jari tertentu, dapat dibuat sebuah lingkaran."

Postulat ini memastikan bahwa sebuah lingkaran dapat dibentuk berdasarkan panjang jari-jari tertentu.

4. Postulat Keempat
   "Semua sudut siku-siku adalah kongruen satu sama lain."
   Ini adalah postulat kesetaraan yang menyatakan bahwa semua sudut 90° adalah sama.
5. Postulat Kelima (Postulat Paralel)
   "Jika garis lurus memotong dua garis lurus lain dan jumlah sudut dalam di satu sisi kurang dari dua sudut siku-siku (kurang dari 180°), maka kedua garis itu, jika diperpanjang cukup jauh, akan bertemu di sisi tersebut."
   Postulat ini membedakan geometri Euclidean dari bentuk geometri lain, dengan menyatakan bahwa dua garis yang tidak sejajar akan bertemu di suatu titik jika jumlah sudutnya kurang dari 180°.
   Postulat Kelima dikenal sebagai Postulat Paralel karena menentukan syarat dua garis menjadi paralel. Banyak matematikawan mencoba membuktikan bahwa postulat ini dapat diturunkan dari empat postulat lainnya, namun gagal, yang kemudian melahirkan geometri non-Euclidean.

Pengaruh Euclid terhadap Pendidikan dan Pemikiran Matematika di Barat dan Timur

1. Pengaruh di Barat

Elements diterjemahkan ke dalam bahasa Latin dan menjadi standar pendidikan di universitas-universitas Eropa sejak Abad Pertengahan. Pada masa Renaissance, para ilmuwan seperti Galileo dan Newton menggunakan prinsip-prinsip Euclidean untuk mengembangkan teori mereka dalam fisika dan astronomi. Buku ini menginspirasi filsuf dan matematikawan Barat untuk mengembangkan sistem pemikiran logis dan metode deduktif, yang sangat berpengaruh dalam filsafat ilmiah dan matematika modern.

2. Pengaruh di Timur

Elements juga diterjemahkan ke dalam bahasa Arab oleh matematikawan terkenal Al-Hajjaj bin Yusuf sekitar abad ke-9 dan diadaptasi oleh para sarjana Muslim. Di dunia Islam, karya ini membantu mengembangkan bidang matematika, astronomi, dan teknik. Di India dan Cina, prinsip-prinsip geometri Euclidean diterima dengan baik, meskipun konsep-konsep ini diperkenalkan dalam konteks budaya dan pendekatan lokal yang berbeda.

Secara keseluruhan, warisan Euclid sebagai "Bapak Geometri" tampak pada penerapan metode deduktif dan pengaruh besarnya dalam pendidikan matematika global.

B. Perkembangan Geometri di Era Abad Pertengahan dan Renaisans

Perkembangan Geometri pada abad 19 s.d. abad 20 Salah satu usaha untuk melakukan pembagian atau pengelompokan wilayah rawan bencana gempa bumi adalah dengan melakukan analisis terhadap gempagempa yang telah terjadi sebelumnya. Analisis fraktal merupakan salah satu metoda yang dapat dipakai untuk mengelompokkan perulangan suatu kejadian gempa. Istilah fractal dibuat oleh Benoit Mandelbrot pada tahun 1975 dari kata latin fractus yang artinya patah, rusak atau tidak teratur. Berbagai jenis fraktal awalnya dipelajari sebagai benda matematis.

Geometri fraktal adalah cabang matematika yang mempelajari sifat-sifat dan prilaku fraktal. Fraktal dapat membantu menjelaskan banyak situasi yang sulit dideskripsikan menggunakan geometri klasik seperti geometri euklidian dan kalkulus. Fraktal menyangkut bentuk baru geometri, dimana obyek utamanya adalah struktur alam dengan ketidakberaturan dan kekasaran beberapa skala (Cahn, 1989). Pohon atau pakis merupakan salah satu contoh fraktal di alam. Bila diambil suatu dari cabang dari satu pohon terlihat bahwa cabang tersebut adalah miniatur dari pohonnya secara keseluruhan yang tidak sama persis, tetapi mirip. Metoda fraktal ini pernah diaplikasikan di daerah Kalifornia bagian selatan dengan menggunakan catalog gempa tahun 1932 – 1972 (Main dan Burton, 1986). Dari hasil penelitian tersebut diketahui bahwa dimensi fraktal (D) untuk daerah Kalifornia bagian selatan adalah 1.78. Angka tersebut menunjukan aktivitas gempa yang sangat banyak yang berasosiasi dengan keberadaan sesar San Andreas.

Dari beberapa definisi mengenai fraktal, maka diambil pengertian bahwa fraktal adalah sebuah kajian dalam ilmu matematika yang mempelajari mengenai bentuk atau geometri yang didalamnya menunjukan sebuah proses pengulangan tanpa batas. Geometri yang dilipat gandakan tersebut memiliki kemiripan bentuk satu sama lain (self-similarity), dan pada penyusunan pelipatgandaannya tersebut tidak terikat pada suatu aturan orientasi, bahkan cenderung meliuk liuk dengan ukuran yang beragam mulai dari kecil hingga besar.

Dalam arsitektur, fraktal dipahami sebagai komponen dari bangunan yang mengalami pengulangan bentuk dalam skala yang berbeda. Beberapa arsitek ternama dunia ternyata telah menggunakan pendekatan geometri fraktal dalam karya arsitektur mereka. Seperti yang dilakukan oleh Le Corbuzier pada Villa Savoye atau Frank Llyod Wright pada Palmer House. Bila kita melihat jauh ke belakang, ternyata karya-karya arsitektur klasik atau beberapa arsitektur tradisional juga dapat dijelaskan melalui matematika fraktal. Bangunan Katedral yang dibangun pada tahun 1104 ini, terdapat bagianbagian yang memiliki kemiripan bentuk satu sama lain (self-similarity). Contohnya pada lantai katedral dihiasi dengan puluhan mozaik, masing-masing dalam wujud segitiga Sierpinski. Bentukan segitiga Sierspinski yang mengalami pengulangan bentuk pada mosaik tersebut menunjukan adanya bentukan fraktal. Karena dibangun sudah cukup lama, bangunan ini mungkin adalah karya arsitektur dengan pendekatan geometri fraktal tertua yang pernah ada.

C. Geomteri Non-Euclidean

Pengantar Geometri Non-Euclidean

Dalam matematika, geometri dibagi menjadi dua jenis, yaitu Euclid dan non-Euclid. Geometri Euclid dikaitkan dengan matematikawan Yunani, Euclid, yang menulis The Elements, terdiri dari 13 buku. Dalam geometri ini, ada lima postulat terkenal, di mana empat di antaranya mudah dipahami, tetapi postulat kelima, yang dikenal sebagai postulat kesejajaran, menimbulkan perdebatan. Secara singkat, postulat ini menyatakan bahwa jika sebuah garis lurus memotong dua garis lain sehingga sudut di satu sisi kurang dari 180°, maka kedua garis tersebut akan berpotongan, postulat kelima inilah yang merupakan perbedaan mendasar antara geometri euclid dengan non-euclid. Upaya matematikawan untuk membuktikan postulat ini tidak berhasil, namun menghasilkan geometri non-Euclid. Dalam perkembangannya, geometri non-Euclid kemudian dibagi menjadi dua jenis, yaitu geometri hiperbolik dan geometri netral. (Arianto & Hernadi, 2016)

Sejarah perkembangan geometri non-Euclidean.

Geometri Non-Euclidean baru diterima secara luas pada abad ke-19, meskipun perdebatan yang mengarah pada penemuannya telah dimulai segera setelah Euclid menulis karya monumentalnya, The Elements. Euclid menyusun geometri berdasarkan 23 definisi, lima pengertian umum, dan lima postulat. Salah satu postulat yang paling terkenal adalah Postulat Kelima, juga disebut sebagai Postulat Paralel. Dalam bentuk aslinya, postulat ini menyatakan bahwa jika sebuah garis lurus memotong dua garis lurus lainnya sedemikian rupa sehingga sudut interior di satu sisi bersama-sama kurang dari dua sudut siku-siku, maka kedua garis tersebut, jika diperpanjang tanpa batas, akan berpotongan di sisi yang sudutnya kurang dari dua sudut siku-siku.

Postulat Kelima ini jauh lebih kompleks daripada postulat lainnya, seperti misalnya pernyataan bahwa "antara dua titik, hanya satu garis lurus yang dapat ditarik". Selama lebih dari seribu tahun, para matematikawan merasa kesulitan dengan Postulat Kelima ini dan percaya bahwa postulat tersebut dapat dibuktikan dari keempat postulat lainnya. Beberapa tokoh besar mencoba membuktikannya dengan menggunakan metode kontradiksi, termasuk matematikawan Arab seperti Ibn al-Haytham (Alhazen) pada abad ke-11, matematikawan Persia Umar Khayyam pada abad ke-12, dan Nasir al-Din al-Tusi pada abad ke-13. Pada abad ke-18, upaya serupa dilakukan oleh matematikawan Italia Giovanni Girolamo Saccheri.

Dalam upaya membuktikan Postulat Kelima, para matematikawan ini mengembangkan sejumlah konsep penting. Ibn al-Haytham, Khayyam, dan al-Tusi menyusun teori-teori mengenai segiempat seperti segiempat Lambert dan segiempat Saccheri. Penelitian ini mengarah pada temuan awal dalam geometri hiperbolik dan eliptik. Teorema-teorema yang mereka kembangkan, serta postulat alternatif seperti Aksioma Playfair, memainkan peran penting dalam perkembangan selanjutnya dari geometri non-Euclidean.

Pada masa itu, banyak matematikawan masih berusaha mencari bukti untuk Postulat Kelima, tetapi usaha mereka seringkali tidak berhasil karena secara tidak sadar mereka menggunakan asumsi yang setara dengan postulat tersebut. Namun, meskipun tidak mencapai tujuan awal mereka, usaha-usaha ini memberikan wawasan baru yang menjadi dasar bagi pengembangan geometri hiperbolik dan eliptik. Contohnya, Umar Khayyam mencoba membuktikan postulat paralel dengan merumuskan kembali prinsip-prinsip yang diambil dari Aristoteles, seperti "dua garis lurus yang berpotongan akan terus konvergen dan tidak mungkin menyimpang setelah mereka bertemu". Ia juga memeriksa tiga jenis segiempat Saccheri, dengan sudut puncak yang tepat, tumpul, dan tajam. Khayyam mampu membuktikan bahwa dalam kasus sudut tumpul dan tajam, hasilnya mengarah kembali ke postulat paralel Euclid, yang tidak disadari olehnya.

Pada abad ke-13, Sadr al-Din al-Tusi, dikenal juga sebagai "Pseudo-Tusi", mengembangkan hipotesis lain yang setara dengan postulat paralel dalam bukunya yang diterbitkan pada 1298. Karyanya ini, meskipun merupakan revisi dari sistem aksioma Euclid, dipelajari oleh matematikawan Eropa, termasuk Giovanni Saccheri, yang kemudian mengkritiknya. Saccheri sendiri, dalam karyanya yang berjudul Euclides ab Omni Naevo Vindicatus (Euclid Dibebaskan dari Semua Cacat), mencoba membuktikan Postulat Kelima dengan menggunakan segiempat Saccheri. Ia menghasilkan banyak teorema dalam geometri hiperbolik, tetapi pada akhirnya percaya bahwa ia telah membuktikan ketidakmungkinan geometri ini, meskipun kesimpulan tersebut sebenarnya didasarkan pada asumsi Euclidean yang ia gunakan secara tidak sadar.

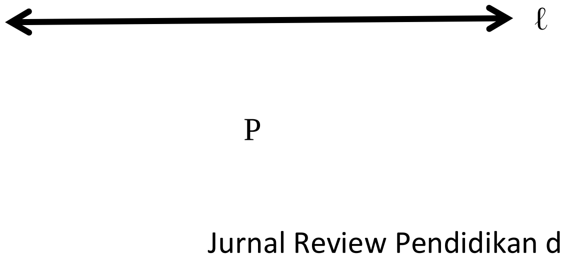
Johann Lambert, seorang matematikawan pada abad ke-18, juga mencoba membuktikan Postulat Kelima melalui karya yang tidak dipublikasikan berjudul Theorie der Parallellinien. Ia menggunakan segiempat yang sekarang disebut segiempat Lambert, yang memiliki tiga sudut siku-siku, untuk mengeksplorasi kemungkinan bahwa sudut keempat adalah sudut akut. Berbeda dengan Saccheri, Lambert tidak pernah merasa bahwa ia mencapai kontradiksi dalam asumsi sudut akut. Ia bahkan menemukan bahwa jumlah sudut dalam segitiga akan berkurang saat luas segitiga bertambah, sebuah temuan penting dalam geometri non-Euclidean. Ia juga berspekulasi bahwa model geometri hiperbolik dapat diwakili oleh bola dengan jari-jari imajiner, meskipun ia tidak mengembangkan ide ini lebih lanjut.

Pada saat itu, kebanyakan ilmuwan masih berpegang pada prinsip-prinsip geometri Euclidean untuk menjelaskan alam semesta. Namun, upaya matematikawan seperti Ibn al-Haytham, Khayyam, al-Tusi, Saccheri, dan Lambert secara tidak langsung membuka jalan bagi penerimaan geometri non-Euclidean sebagai cabang matematika yang sah di kemudian hari. (Fauzi, Syafari, & Sinambela, 2013 Edisi Revisi 2023)

Permasalahan dengan Postulat Kelima Euclid

Menurut J.L. Heiberg 2008:7 Dalam Jurnal (Rosyadi & Lestari, 2017), Postulat Kelima Euclid menyatakan bahwa "Jika sebuah garis lurus memotong dua garis lurus lainnya dan menghasilkan sudut-sudut di satu sisi yang jumlahnya kurang dari dua sudut siku-siku (kurang dari 180°), maka kedua garis tersebut, jika diperpanjang tanpa batas, akan bertemu di sisi tempat sudut-sudut tersebut lebih kecil dari sudut siku-siku, dan tidak akan bertemu di sisi lainnya."

Postulat Kelima Euclid telah memicu perdebatan di kalangan matematikawan mengenai validitasnya. Selama dua ribu tahun, para matematikawan berusaha membuktikan bahwa Postulat Kelima, atau yang dikenal juga sebagai Postulat Kesejajaran Euclid, tidak benar. Beberapa dari mereka mencoba membuktikannya, sementara yang lain hanya memformulasikan ulang Postulat Kesejajaran dalam bentuk yang berbeda, seperti yang diusulkan oleh John Playfair. Menurut Marvin J. Greenberg (1994:19), Postulat Kelima Euclid, atau Postulat Playfair, berbunyi: "Untuk setiap garis ℓ dan titik yang tidak berada di garis tersebut, hanya ada satu garis m yang melewati titik tersebut dan sejajar dengan ℓ." Berikut ilustrasinya

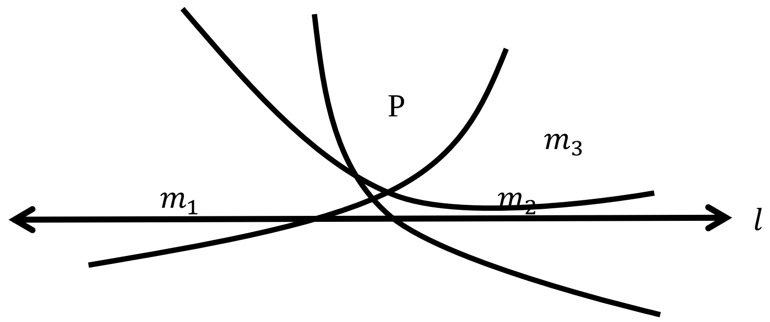


Beberapa ilmuwan gagal membuktikan bahwa Postulat Kesejajaran Euclid adalah salah, tetapi usaha ini membuka pemahaman baru di kalangan matematikawan tentang ketidakpastian postulat tersebut dan kemungkinan adanya teori geometri alternatif. Carl Friedrich Gauss, Janos Bolyai, dan Nikolai Ivanovich Lobachevsky secara independen mengembangkan konsep yang bertentangan dengan Postulat Kesejajaran Euclid (Venema, 2012:132). Lobachevsky menyatakan bahwa "untuk setiap garis ℓ dan titik P yang tidak terletak pada ℓ, ada minimal dua garis yang melewati P dan sejajar dengan ℓ" (Venema, 2012:21). Postulat ini dikenal sebagai Kesejajaran Hiperbolik dan merupakan kebalikan dari Postulat Kesejajaran Euclid (Venema, 2012:105). Konsep ini menjadi dasar bagi Geometri Hiperbolik.

Geometri Hiperbolik

Geometri hiperbolik adalah jenis geometri yang memiliki konsep kesejajaran yang berbeda dari Postulat Kesejajaran Euclid. Dengan kata lain, geometri hiperbolik dibangun atas dasar empat postulat pertama Euclid, tetapi tidak memasukkan Postulat Kesejajaran Euclid. Oleh karena itu, objek dan konsep dasar seperti titik, garis, jarak, dan sudut dalam geometri hiperbolik tetap sama seperti dalam geometri Euclid. Kontribusi matematikawan seperti **Nikolai Lobachevsky** dan **János Bolyai** dalam mengembangkan geometri hiperbolik.

Postulat kesejajaran hiperbolik merupakan ingkaran dari postulat kesejajaran euclid.



Pada gambar diatas garis l sejajar dengan $m_1, m_2,$ dan m_3. Maka disimpulkan paling sedikit ada dua garis yang sejajar yang melalui suatu titik di luar garis yang diketahui, sehingga ada tak hingga banyak garis sejajar yang dapat digambar.

Penelitian ini menunjukkan beberapa konflik kognitif yang dialami subjek terkait perbedaan antara geometri Euclid, hiperbolik, dan eliptik:

1. Pada geometri Euclid dan hiperbolik, dua garis berbeda berpotongan di paling banyak satu titik, sedangkan pada geometri eliptik, garis bisa berpotongan di satu (eliptik tunggal) atau dua titik (eliptik ganda).
2. Pada geometri Euclid, hanya ada satu garis sejajar yang melalui titik P di luar garis g, sedangkan pada geometri hiperbolik ada setidaknya dua garis sejajar, dan pada geometri eliptik tidak ada garis sejajar.
3. Di geometri Euclid, dua garis sejajar berjarak sama di mana-mana, sedangkan di geometri hiperbolik jaraknya tidak pernah sama, dan di geometri eliptik tidak ada garis sejajar.
4. Pada geometri Euclid, jika sebuah garis memotong satu garis sejajar, maka harus memotong yang lain, sedangkan pada geometri hiperbolik tidak harus, dan pada geometri eliptik tidak ada garis sejajar.
5. Hipotesis Sacherri menghasilkan sudut siku-siku pada geometri Euclid, sudut lancip pada geometri hiperbolik, dan sudut tumpul pada geometri eliptik.
6. Dua garis yang berbeda dan tegak lurus pada garis yang sama adalah sejajar pada geometri Euclid dan hiperbolik, namun berpotongan pada geometri eliptik.
7. Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° pada geometri Euclid, kurang dari 180° pada geometri hiperbolik, dan lebih dari 180° pada geometri eliptik.
8. Dua segitiga dengan sudut-sudut bersesuaian sama akan sebangun di geometri Euclid, namun kongruen di geometri hiperbolik dan eliptik.

Subjek yang terbiasa dengan konsep Euclidean kesulitan memahami perbedaan ini, terutama terkait jumlah sudut segitiga dan konsep kesejajaran di geometri non-Euclidean. (Fauzi, Syafari, & Sinambela, 2013 Edisi Revisi 2023)am

Geometri Eliptik

Teori geometri Riemann adalah salah satu yang menolak postulat kesejajaran Euclid, setelah sebelumnya Lobachevsky berhasil menantang postulat tersebut. Menurut postulat Riemann, tidak ada garis yang sejajar. Dalam geometri eliptik (atau geometri bola), garis-garis tidaklah lurus karena merupakan bagian dari lingkaran besar. Terdapat dua jenis geometri yang berlandaskan pada postulat kesejajaran Riemann. Pertama, geometri eliptik tunggal, di mana setiap garis bertemu di satu titik tanpa adanya garis yang membagi bidang. Kedua, geometri eliptik ganda, di mana dua garis berpotongan tepat di dua titik dan setiap garis membagi bidang. Istilah "tunggal" dan "ganda" mengacu pada sifat perpotongan dua garis, sementara istilah "eliptik" digunakan untuk mengklasifikasikan geometri ini sejalan dengan klasifikasi geometri Euclid dan Lobachevsky, yang masing-masing disebut parabolik dan hiperbolik. (Suryaningruma & Sara, 2022)

Dalam geometri eliptik, jumlah sudut sebuah segitiga selalu lebih besar dari 180°. Ini juga berarti bahwa jumlah sudut dari sebuah segiempat lebih besar dari 360°. Mason menyatakan bahwa "Konstruksi segitiga pada bola menunjukkan perbedaan signifikan dalam geometri bola. Pada segitiga di bidang datar, jumlah sudutnya adalah 180°, tetapi pada segitiga di bola, jumlah sudutnya lebih dari 180°" (Mason, 2019). Berdasarkan hal ini, dapat disimpulkan bahwa dalam geometri eliptik, jumlah sudut segitiga selalu melebihi 180°.

Aplikasi Geometri Non-Euclidean

Geometri hiperbolik memiliki peran penting di berbagai bidang, seperti teknik, arsitektur, seni, ilmu komputer, dan jaringan. Dalam matematika, geometri ini sering digunakan dalam teori grup, terutama teori kombinatorial Gromov. Penggunaannya yang paling umum adalah di topologi komputer dan pemetaan, yang terus berkembang.

Selain itu, geometri hiperbolik digunakan untuk visualisasi concept space dalam program adaptive e-learning, seperti pemetaan graf uvelic. Biasanya, konsep ini dirancang menggunakan diagram peta, struktur bercabang ke bawah, dan pohon hierarkis. Di bidang fisika, geometri hiperbolik diaplikasikan untuk mengamati pergeseran panjang gelombang elektromagnetik dan dalam teori relativitas. Di arsitektur dan seni, model geometri ini juga sering digunakan, termasuk pada motif-motif batik Indonesia dan dalam teknik pengambilan gambar seperti shading. (I.A, 2023)

Geometri eliptik memiliki berbagai aplikasi penting dalam berbagai bidang. Di bidang astronomi, geometri ini digunakan untuk memahami kelengkungan ruang angkasa, seperti orbit planet yang berbentuk elips, serta dalam teori relativitas umum untuk menjelaskan kelengkungan ruang-waktu di sekitar objek masif. Dalam navigasi dan geodesi, geometri eliptik membantu dalam perhitungan jarak yang akurat di permukaan bumi, yang berbentuk hampir elips, dan sistem GPS bergantung pada konsep ini. Geometri eliptik juga diaplikasikan dalam penerbangan dan navigasi antariksa, terutama dalam perencanaan lintasan pesawat ruang angkasa. Di bidang fisika, teori relativitas umum memanfaatkan geometri eliptik untuk menggambarkan bagaimana benda-benda besar membengkokkan ruang-waktu di sekitar mereka. Selain itu, dalam seni dan arsitektur, bentuk eliptik sering digunakan dalam desain kubah dan lengkungan bangunan. Geometri eliptik juga penting dalam matematika, terutama dalam teori grup dan topologi, yang mempelajari struktur ruang melengkung dan geometri non-Euclidean. Aplikasi-aplikasi ini menunjukkan betapa pentingnya geometri eliptik dalam memahami ruang dan interaksi objek di dalamnya.

D. Geometri di Era Modern

1. Geometri Non-Euclidean

a. Diperkenalkan pada abad ke-19, geometri ini mengubah salah satu postulat dasar Euclid, yaitu postulat kelima tentang garis paralel. Terdapat dua jenis utama geometri non-Euclidean:
    - **Geometri Hiperbolik**: Menganggap bahwa ada lebih dari satu garis yang dapat ditarik melalui satu titik yang tidak berpotongan dengan garis lainnya.
    - **Geometri Eliptik**: Menyatakan bahwa tidak ada garis paralel.

b. Geometri ini menjadi dasar bagi teori relativitas Albert Einstein.

2. Geometri Diferensial

a. Geometri diferensial adalah cabang matematika yang menggunakan kalkulus dan aljabar linear untuk mempelajari kurva, permukaan, dan ruang-ruang lain.
b. Banyak diterapkan dalam fisika teoretis, khususnya dalam teori relativitas umum dan teori medan.

3. Geometri Proyektif

a. Dalam geometri proyektif, konsep paralelisme tidak relevan, dan semua garis dianggap berpotongan pada satu titik di "tak terhingga".
b. Banyak digunakan dalam grafika komputer, arsitektur, dan desain visual.

4. Geometri Fraktal

- Memanfaatkan pola berulang yang rumit dan tidak beraturan untuk membentuk objek geometris.
- Berguna dalam model alam, seperti bentuk gunung, garis pantai, awan, dan pola pertumbuhan tumbuhan.

5. Geometri Algebraik

a. Mempelajari set solusi dari persamaan polinomial. Ini adalah bidang yang menghubungkan antara aljabar abstrak dan geometri.
b. Geometri ini digunakan dalam berbagai bidang seperti teori bilangan, topologi, dan kriptografi.

6. Topologi

a. Walaupun bukan geometri dalam pengertian tradisional, topologi adalah studi tentang sifat-sifat yang dipertahankan melalui deformasi, peregangan, dan pembengkokan.
b. Konsep seperti kontinuitas, konektivitas, dan homeomorfisme sangat penting dalam topologi.

7. Geometri Komputasi

a. Fokus pada pengembangan algoritma untuk menyelesaikan masalah geometri.
b. Sangat penting dalam bidang seperti grafika komputer, visi komputer, dan rekayasa perangkat lunak.

8. Geometri Diskrit

a. Mempelajari struktur geometris yang terdiri dari objek-objek diskrit, seperti graf, polihedra, dan konfigurasi titik.
b. Berguna dalam pengolahan data, jaringan komputer, dan optimasi.

Geometri modern telah menjadi alat yang penting dalam berbagai disiplin ilmu, membantu kita memahami dan memecahkan masalah yang kompleks melalui pendekatan matematika yang lebih fleksibel dan luas.

Manfaat Geometri dalam Kehidupan Sehari-hari bagi Siswa:

Geometri memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari, menjadikannya penting untuk dipelajari siswa. Berikut adalah beberapa alasan yang menyoroti pentingnya mempelajari geometri:

1. Pengembangan Keterampilan Dasar

Mempelajari geometri membantu siswa mengembangkan keterampilan dasar seperti pemikiran logis, penalaran deduktif, analisis, dan pemecahan masalah, yang berkontribusi pada perkembangan mereka secara menyeluruh.

2. Konektifitas dengan dunia nyata

Konsep geometri memungkinkan siswa menghubungkan objek-objek yang mereka pelajari di kelas dengan konteks nyata, seperti arah dan tempat, sehingga membantu mereka mengembangkan pemikiran praktis.

3. Pemahaman hubungan spasial

Memahami hubungan spasial sangat penting dalam pemecahan masalah dan keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS) yang dapat diajarkan melalui geometri.

4. Aplikasi dalam kehidupan nyata

Geometri memainkan peran besar dalam berbagai bidang, seperti memilih bahan konstruksi atau merancang bangunan, yang menunjukkan betapa bermanfaatnya bagi siswa.

Penggunaan Geometri dalam Kehidupan Sehari-hari

1. Konstruksi Bangunan

Geometri digunakan dalam konstruksi bangunan, bendungan, jalan, kuil, dan banyak lagi. Selama berabad-abad, geometri berperan besar dalam membangun kuil-kuil bersejarah yang memanfaatkan konsep geometris sederhana namun efektif.

2. Grafik Komputer

Presentasi audiovisual dalam pendidikan dan hiburan, seperti grafik komputer pada ponsel dan laptop, merupakan contoh nyata penerapan geometri dalam teknologi sehari-hari. Game juga menggunakan konsep geometris untuk menghitung jarak dan bentuk objek yang dirancang.

3. Seni

Para seniman menggunakan geometri dalam seni untuk mendesain lukisan, pakaian, dan aksesoris, memanfaatkan warna, goresan kuas, dan bentuk geometris untuk mengekspresikan ide mereka.

4. Pengukuran orbit dan Gerakan planet

Para astronom menggunakan geometri untuk melacak posisi bintang dan mengukur orbit serta jarak antar planet dan satelit, yang merupakan aplikasi nyata dari geometri koordinat.

5. Desain interior

Geometri koordinat juga diterapkan dalam desain interior, membantu dalam menata ruang dan meletakkan barang-barang dengan estetika yang seimbang.

Geometri jelas bermanfaat di berbagai aspek kehidupan, dari pendidikan hingga konstruksi dan seni.

SIMPULAN

Geometri Kuno.

Geometri kuno dimulai dari kebutuhan praktis, seperti pengukuran tanah dan bangunan yang dilakukan oleh bangsa Mesir dan Babilonia. Namun, geometri mencapai titik kematangan dengan karya-karya matematikawan Yunani, terutama Euclid, yang menyusun "Elements" sebagai landasan dari geometri Euclidean. Pada masa ini, geometri menjadi disiplin yang lebih abstrak dan sistematis, dengan pendekatan deduktif yang sangat berpengaruh terhadap matematika hingga berabad-abad kemudian.

Perkembangan Geometri di Era Abad Pertengahan dan Renaisans.

Pada era Abad Pertengahan, geometri mengalami perkembangan lebih lanjut berkat kontribusi dari para ilmuwan Islam yang menerjemahkan dan memperluas karya-karya Yunani kuno. Pada masa Renaisans, geometri mengalami kebangkitan dengan diperkenalkannya geometri analitik oleh René Descartes, yang menyatukan geometri dan aljabar. Penemuan ini memberikan alat baru untuk memecahkan masalah geometris melalui koordinat dan persamaan, yang membuka jalan bagi perkembangan selanjutnya dalam matematika modern.

Geometri Non-Euclidean.

Penemuan geometri non-Euclidean di abad ke-19 oleh Gauss, Lobachevsky, dan Bolyai membawa revolusi dalam dunia matematika. Geometri ini menantang asumsi dasar geometri Euclidean, khususnya terkait dengan sifat garis-garis paralel, dan memungkinkan munculnya konsep baru tentang ruang yang melampaui intuisi sehari-hari. Geometri non-Euclidean kemudian menjadi landasan penting bagi pengembangan teori relativitas oleh Einstein, yang mengubah cara pandang kita tentang ruang dan waktu.

Geometri di Era Modern.

Di era modern, geometri berkembang lebih jauh dengan kemunculan cabang-cabang baru, seperti geometri aljabar, topologi, dan geometri diferensial, yang berperan besar dalam ilmu fisika dan teknologi. Geometri juga menjadi inti dari banyak inovasi dalam ilmu komputer, seperti grafis komputer, pemodelan 3D, dan kecerdasan buatan. Integrasi geometri dengan disiplin ilmu lain terus mendorong penemuan baru dan penerapan teknologi dalam kehidupan sehari-hari.

Secara keseluruhan, perkembangan geometri dari zaman kuno hingga era modern menunjukkan bagaimana cabang matematika ini tidak hanya memengaruhi matematika murni tetapi juga memiliki dampak luas dalam ilmu pengetahuan dan teknologi. Geometri tetap relevan dan terus beradaptasi dengan kebutuhan zaman, menjadikannya bagian integral dari berbagai aspek kehidupan manusia.

DAFTAR PUSTAKA

Aini, Gina Mawaddatul, Intan Dwi Hastuti, and Yuni Mariyati. "Ethnomathematics: Exploration of Geometry from Karang Bayan Ancient Mosque in Elementary School Mathematics Learning." Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika 12.3 (2023): 517-530.

Arianto, F., & Hernadi, J. (2016). Ruang Dasar dan Model Proyeksi Stereografik pada Geomteri Hiperbolik. Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya, 41.

Arrifada, Yuni dkk.2016. Dinamika Perkembangan Matematika Abad Pertengahan Hingga Munculnya Gerakan Renaissance (Implikasinya Terhadap Pembelajaran Matematika di Sekolah). Surabaya: Jurnal Fourier. Vol. 5, No. 2.

Budhi, Wono Setya. "Geometri di Bidang Euclid."

Fauzi, M. A., Syafari, & Sinambela, P. N. (2013 Edisi Revisi 2023). Mengenal Geometri Euclid dan Non-Euclid Lebih Dekat. Medan: Unimed Press.

Fitriyani, Harina, Aan Hendroanto, and Puput Anggoro. Geometri Ruang. UAD PRESS, 2021.

Fuat, F. GEOMETRI DATAR: INDIVIDUAL TEXTBOOK. Lembaga Academic & Research Institute, 2020.

Galih & Handayani.2007. Pemetaan Pola Terjadinya Gempa Bumi di Indonesia dengan Metode Fraktal. Bandung: Jurnal Riset Geologi dan Pertambangan Jilid 17 No. 2.

Hardiarti, Sylviyani. "Etnomatematika: Aplikasi bangun datar segiempat pada candi muaro jambi." Aksioma 8.2 (2017): 99-110.

Hasang. Stenly dan Surijadi Supardjo. 2012. Geometri Fraktal dalam Rancangan Arsitektur. Manado: Media Matrasain Vol 9 No 1.

I.A, N. (2023). Geometri Hiperbolik dan Eliptik. Jember.

Istifada, Fina, et al. "Kajian Etnomatematika dalam Seni Bangunan Masjid Jami Aulia Sapuro Pekalongan Dilihat dari Segi Geometri." SANTIKA: Seminar Nasional Tadris Matematika. Vol. 3. 2023.

Khafifah, Khurotun Lutfi, Lutfiana Dwi Safitri, and Nova Yulianasari. "Sejarah perkembangan matematika Yunani kuno dan tokoh-tokohnya." UNEJ e-Proceeding (2022): 539-544.

MIT News. (2023). Seorang ilmuwan komputer mendorong batas-batas geometri.

Nature. (2023). AI DeepMind memecahkan masalah geometri pada tingkat siswa berbintang.

Putri, Melani Alfia, et al. "Eksplorasi Etnomatematika Pada Konsep Geometri dalam Ornamen Ukiran Khas Bali Kuno." SANTIKA: Seminar Nasional Tadris Matematika. Vol. 4. 2024.

Quanta Magazine. (2023). Di ‘Wild West’ Geometri, Matematikawan Mendefinisikan Ulang Bola.

Rosyadi, H., & Lestari, H. P. (2017). Sifat-Sifat Ketegaklurusan, Kesejajaran, dan Segitiga Asimptotik pada Geomteri Hiperbolik. Jurnal Matematika , 41.

Suryaningruma, P., & Sara, J. A. (2022). Geometri Eliptik di Kaji Secara Filsafat dan Penerapannya dalam Pembelajaran Matematika. PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika, 62.