Jurnal Review Pendidikan dan Pengajaran
http://journal.universitaspahlawan.ac.id/index.php/jrpp
Volume 6 Nomor 4, 2023
P-2655-710X e-ISSN 2655-6022

Submitted : 27/11/2023
Reviewed : 02/12/2023
Accepted : 07/12/2023
Published : 13/12/2023

Mulyono [1]
Muhammad Eka Suryana[2]
Pramudio [3]
Hazizi[4]
Bagus Sumargo[5]
Sri Sukatmi[6]

KAJIAN METODE EKSTRAPOLASI RICHARDSON DAN AITKEN, SUATU METODE UNTUK MENGHITUNG INTEGRAL TERTENTU SECARA NUMERIK

Abstrak
Penelitian ini bertujuan untuk menganalisa Metode Ekstrapolasi Richardson dan Metode Ekstrapolasi Aitken, yaitu metode untuk menghitung integral-integral tertentu secara numerik, khususnya untuk fungsi-fungsi yang sangat rumit, yang integralnya tidak bisa dihitung secara analitik. Faktor yang paling penting untuk dipertimbangkan dalam membandingkan metode-metode tersebut adalah akurasi dari penyelesaian numeriknya. Pada kajian ini digunakan software Microsoft Excel sebagai alat untuk membantu penghitungannya. Hasil dari kajian ini didapat bahwa Metode Ekstrapolasi Richardson lebih baik dari Metode Ekstrapolasi Aitken, karena akurasi hasil integral numerik dari metode Ekstrapolasi Richardson selalu lebih dibandingkan hasil integral numerik dari metode Ekstrapolasi Aitken.
Kata Kunci: Integral Numerik, Metode Ekstrapolasi Richardson, Metode Ekstrapolasi Aitken.

Abstract
This research aims to analyze the Richardson Extrapolation Method and the Aitken Extrapolation Method, namely methods for calculating certain integrals numerically, especially for very complicated functions, whose integrals cannot be calculated analytically. The most important factor to consider in comparing these methods is the accuracy of the numerical solution. In this study, Microsoft Excel software was used as a tool to help with the calculations. The results of this study show that the Richardson Extrapolation Method is better than the Aitken Extrapolation Method, because the accuracy of the numerical integral results from the Richardson Extrapolation method is always better than the numerical integral results from the Aitken Extrapolation method.
Keywords: The Numerical Integral, Richardson Extrapolation Method, Aitken Extrapolation Zethod.

PENDAHULUAN

Integral tertentu akan mengurusi perhitungan integral diantara batas-batas integral yang telah ditentukan, yang biasanya dinyatakan sebagai: $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$.

Nilai dari integral tertentu $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ adalah sama dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu x, garis x = a dan garis x = b.

Fungsi-fungsi yang dapat diintegralkan adalah fungsi-fungsi kontinu yang sederhana maupun fungsi kontinu yang sangat rumit, misalnya akan menghitung integral tertentu berikut ini :

[1,2,3)]Program Studi Ilmu Komputer, FMIPA, UNJ
email: mulyono@unj.ac.id, eka-suryana@unj.ac.id, pramudiohanggoro@gmail.com, andrewalvaroh@gmail.com
[5)]Program Studi Statistika, FMIPA, UNJ
email: bagussumargo@unj.ac.id
[6)]Universitas Terbuka
email: srisukatmi@ecampus.ut.ac.id

$\int_1^4 e^{\sqrt{0,2x}}\left(5x^{8/3} - 3x^2\right)dx$. Untuk integral dari fungsi yang cukup rumit seperti itu, sangat sulit untuk diselesaikan dengan metode-metode integrasi yang sederhana, dan hanya bisa dihitung dengan menggunakan integral numerik (Conte & Boor, 1992; Munir, 2013).

Demikian pula untuk fungsi yang ditabulasikan, yaitu fungsi yang nilai-nilai dari x dan f(x) pasangannya diberikan pada sejumlah titik diskrit dan pada umumnya fungsi f(x) tidak diketahui secara eksplisit, dan fungsi seperti ini biasanya dijumpai pada data hasil eksperimen di laboratorium atau berupa data pengamatan di lapangan. Untuk menghitung integral dari fungsi yang ditabulasikan seperti ini harus dikerjakan dengan menggunakan metode integral numerik tertentu (Otto & Denier, 2005; Karris, 2007).

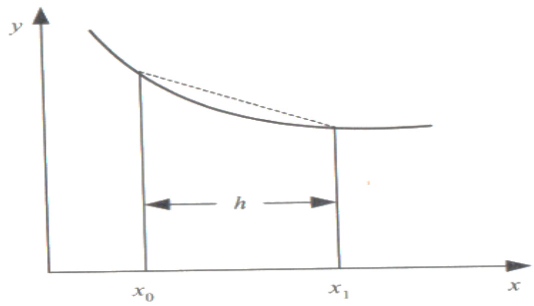
Untuk menghitung integral tertentu dari $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ seperti ini ada banyak metode yang bisa digunakan, dan pada artikel ini akan digunakan metode Ekstrapolasi Richardson dan metode Ekstarpolasi Aitken, dan dari kedua metode tersebut akan dibandingkan besarnya kesalahan numerik.

METODE

Berikut ini adalah sejumlah metode integral numerik yang akan digunakan dan dibandingkan hasilnya (Chapra & Canale, 1991; Triatmodjo, 1992; Munir, 2013; Yang dkk, 2020):

Metode Trapesium

Perhatikan gambar berikut ini :



Gambar 1. Pias yang berbentuk trapesium

Gambar di atas adalah sebuah pias berbentuk trapesium dari x = x0 dan x = x1. Luas satu pias tersebut adalah $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$, yang disebut metode trapesium. Bila suatu luasan pada interval [a, b] dibagi menjadi n pias, maka metode integrasi yang diperoleh adalah Metode Trapesium Gabungan sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots. + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

b. Metode Ekstrapolasi Richardson

Rumus dari metode Trapesium untuk menghitung integral numerik $\int_a^b f(x)dx$ adalah $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) - \frac{(b-a)f''(t)}{12}h^2 = I(h) + Ch^2$ dengan I(h) adalah integrasi dengan menggunakan metode Trapesium dengan jarak antar titik x sebesar h dan $C = \frac{(b-a)f''(t)}{12}$. Metode integrasi yang lain dapat ditulis sebagai $\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^q$, C dan q adalah konstanta yang tidak tergantung dengan h. Nilai q dapat ditentukan langsung dari orde kesalahan dari metode integrasi, yaitu untuk metode Trapesium q=2, metode Titik-tengah q=3 dan metode Simpson q=4.

Tujuan dari metode Ekstrapolasi Richardson adalah untuk menghitung nilai integral yang lebih baik dibandingkan dengan I(h). Misalkan J adalah nilai integral dari f(x) yang lebih baik daripada I dengan jarak antar titik x adalah h. Jadi $J = I(h) + Ch^q$. Jarak antar titik x, yaitu h diekstrapolasi menjadi 2h, selanjutnya dihitung integral numeriknya, yaitu J = $\mathrm{I}(2\mathrm{h}) + \mathrm{C}(2\mathrm{h})^{\mathrm{q}}$. Selanjutnya didapat persamaan sebagai berikut:

$$\mathrm{I(h)} + \mathrm{Ch}^{\mathrm{q}} = \mathrm{I}(2\mathrm{h}) + \mathrm{C}(2\mathrm{h})^{\mathrm{q}}$$

$$\mathrm{I(h)} - \mathrm{I}(2\mathrm{h}) = Ch^q(2^q - 1),$$

sehingga $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{I(h)-I(2h)}}{\mathbf{h^q(2^q-1)}}$, dan dari persamaan J = $\mathrm{I(h)} + \mathrm{Ch}^{\mathrm{q}}$, didapat $\mathrm{J} = \mathrm{I(h)} + \frac{\mathbf{I(h)-I(2h)}}{\mathbf{(2^q-1)}}$ **,** yang merupakan persamaan Ekstrapolasi Richardson (Maghfiroh dkk, 2020; Maure dkk, 2021; Nirsal, 2014).

c. Metode Ekstrapolasi Aitken

Dari ekstrapolasi Richardson didapat bahwa: I= $\int_a^b \mathrm{f(x)dx} \approx \mathrm{I(h)} + \mathrm{Ch}^{\mathrm{q}}$, dengan:
h = Lebar pias, C dan q konstanta, dengan q diketahui dan C bisa dieliminir. I(h) adalah hampiran dari nilai I, Ch^{q} adalah kesalahan dari hampiran nilai I.

Maka $J = I(h) + \frac{\mathbf{I(h)-I(2h)}}{\mathbf{(2^q-1)}}$ adalah perkiraan nilai integral yang lebih baik daripada I. Jika nilai q tidak diketahui, maka digunakan 3 buah perkiraan nilai I, yaitu : I(h), I(2h) dan I(4h), sehingga didapat 3 persamaan berikut ini:

$J = \mathrm{I(h)} + \mathrm{Ch}^{\mathrm{q}}$, maka $C = \frac{J-I(h)}{h^q}$

$J = \mathrm{I(2h)} + \mathrm{C(2h)}^{\mathrm{q}}$, maka $C = \frac{J-I(2h)}{(2h)^q}$

$J = \mathrm{I(4h)} + \mathrm{C(4h)}^{\mathrm{q}}$, maka $C = \frac{J-I(4h)}{(4h)^q}$

Didapat $\frac{J-I(h)}{h^q} = \frac{J-I(2h)}{(2h)^q}$ atau $\frac{J-I(h)}{J-I(2h)} = \frac{h^q}{(2h)^q} = \frac{1}{2^q}$ dan

$\frac{J-I(2h)}{(2h)^q} = \frac{J-I(4h)}{(4h)^q}$ atau $\frac{J-I(2h)}{J-I(4h)} = \frac{(2h)^q}{(4h)^q} = \frac{1}{2^q}$

Jadi $\frac{J-I(h)}{J-I(2h)} = \frac{J-I(2h)}{J-I(4h)}$

$$J^2 - JI(h) - JI(4h) + I(h)I(4h) = J^2 - 2JI(2h) + [I(2h)]^2$$

$$J = \frac{I(h)I(4h)-[I(2h)]^2}{I(h)-2I(2h)+I(4h)} = \frac{I(h)[I(h)-2I(2h)+I(4h)]-[I(h)-I(2h)]^2}{I(h)-2I(2h)+I(4h)}$$

$= I(h) - \frac{[I(h)-I(2h)]^2}{I(h)-2I(2h)+I(4h)}$ yang disebut sebagai persamaan Ekstrapolasi Aitken (Maure dkk, 2021; Nirsal, 2014).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pelaksanaan penelitian ini dilakukan dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

a. Menyiapkan sejumlah fungsi f(x) yang akan dihitung integralnya dengan batas integral tertentu, yang akan digunakan pada penelitian ini, yaitu yang akan dihitung hasilnya dengan menggunakan metode-metode yang akan diteliti yaitu: Metode Ekstrapolasi Richardson dan Metode Ekstrapolasi Aitken.
b. Melakukan eksperimen terhadap metode-metode yang akan digunakan tersebut dengan menggunakan integral dari fungsi yang sama dan batas integral yang juga sama.
c. Melakukan evaluasi terhadap hasil-hasil uji coba yang dilakukan. Parameter yang digunakan untuk melakukan evaluasi kinerja dari metode-metode yang digunakan tersebut adalah akurasi penyelesaian numerik.

Pada penelitian ini diberikan sejumlah soal integral tertentu yang bisa diselesaikan secara analitik dan soal integral tertentu yang sangat rumit yang tidak mungkin bisa diselesaikan secara analitik, maupun soal integral tertentu yang berupa fungsi yang ditabulasikan, yaitu nilai dari x dan f(x) pasangannya diberikan pada sejumlah titik diskrit dan pada umumnya fungsi f(x) tidak diketahui secara eksplisit.

Berikut ini soal-soalnya:

1. Hitunglah $\int_3^6 \mathbf{e^{0,1x^3}\, x^2\, dx}$ secara :
   a. Analitik

b. Numerik, yaitu dengan menggunakan metode : Ekstrapolasi Richardson dan Ekstrapolasi Aitken yang menggunakan jarak antar titik (h) = 0,25 (atau nilai n = 12).
c. Numerik, yaitu dengan menggunakan metode : Ekstrapolasi Richardson dan Ekstrapolasi Aitken yang menggunakan jarak antar titik (h) = 0,05 (atau nilai n = 60).
d. Numerik, yaitu dengan menggunakan metode : Ekstrapolasi Richardson dan Ekstrapolasi Aitken yang menggunakan jarak antar titik (h) = 0,025 (atau nilai n = 120)

2. Hitunglah $\int_1^4 e^{\sqrt{0,2x}}\left(5x^{8/3} - 3x^2\right)dx$ secara numerik, yaitu dengan menggunakan metode : Ekstrapolasi Richardson dan Ekstrapolasi Aitken yang menggunakan banyak pias (n) = 60.
3. Diberikan tabel data sebagai berikut:

Tabel 1. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari fungsi f(x)

i	$\mathbf{x_i}$	$\boldsymbol{f}(\mathbf{x_i})$
0	0,5	1,616300
1	0,6	2,263429
2	0,7	3,103386
3	0,8	4,189755
4	0,9	5,590002
5	1,0	7,389056
6	1,1	9,693762
7	1,2	12,638417
8	1,3	16,391669
9	1,4	21,165112
10	1,5	27,223997
11	1,6	34,900555
12	1,7	44,610586

Hitunglah integral tertentu $\int_{0,5}^{1,7} f(x)dx$ secara numerik, yaitu dengan menggunakan metode : Ekstrapolasi Richardson dan Ekstrapolasi Aitken yang datanya diberikan pada tabel di atas

Jawaban soal nomor 1:

a. Jawaban secara analitik dari $\int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2\, dx$ adalah:
Misal u = $0,1x^3$, maka du = $\frac{3}{10}x^2\,dx$ atau $\frac{10}{3}\,du = x^2\,dx.$
$\int \mathbf{e^{0,1x^3}}\, \boldsymbol{x^2}\, dx = \int e^u \,\frac{10}{3}\, du = \frac{10}{3}e^u + C = \frac{10}{3}\, e^{0,1x^3} + C$
Jadi $\int_3^6 e^{0,1x^2}\, x\, dx = \frac{10}{3}\, e^{0,1x^3}\Big|_3^6 = \frac{10}{3}\, e^{21,6} - \frac{10}{3}\, e^{2,7}$ = 8010129763,90985000

b. Jawaban secara numerik dari $\int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2\, dx$ **,** dengan menggunakan h=0,25 (atau nilai n=12) adalah :
$f(x) = e^{0,1x^3}\, x^2$ dan h = 0,25
Dari hitungan di Ms.Excel, diperoleh data sebagai berikut :

Tabel 2. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari fungsi $f(x) = e^{0,1x^3}\, x^2$dengan h = 0,25.

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f_i = f(x_i)}$
0	3,00	133,91758552
1	3,25	327,05308353
2	3,50	891,60743194
3	3,75	2743,38868054
4	4,00	9629,52060595
5	4,25	38964,27446267
6	4,50	183625,71248041
7	4,75	1018128,54079511

8	5,00	6708432,16302186
9	5,25	53051232,37551160
10	5,50	508510379,11160800
11	5,75	5965968300,21782000
12	6,00	86509401985,89670000

Metode Ekstrapolasi Richardson :

Rumus metode Ekstrapolasi Richardson adalah : $J = I(h) + \frac{I(h)-I(2h)}{(2^q-1)}$**,** dengan:

I(h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan h=0,25.

Dari data di tabel 2, maka:

I(h) = $\int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2\, dx = \frac{1}{2}h(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + f_{12})$ = 12447548428,46820000.

I(2h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan 2h=2*0,25=0,5, sehingga:

I(2h) = $\int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2\, dx = \frac{1}{2} * 0,5 * (f_0 + 2f_2 + 2f_4 + 2f_6 + 2f_8 + 2f_{10} + f_{12})$
= 21885057009,01120000

Jadi nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Richardson = $I(h) + \frac{I(h)-I(2h)}{(2^q-1)}$ = $12447548428,46820000 + \frac{12447548428,46820000 - 21885057009,01120000}{(\mathbf{2^2-1})}$

= 9301712234,95387000

Kesalahan = $\frac{|8010129763,90985000 - 9301712234,95387000|}{8010129763,90985000}$ = 0,161243639 = 16,1243639 %.

Metode Ekstrapolasi Aitken:

Rumus metode Ekstrapolasi Aitken adalah : J = $I(h) - \frac{[I(h)-I(2h)]^2}{I(h)-2I(2h)+I(4h)}$

I(h) dan I(2h) sudah dihitung di metode Ekstrapolasi Richardson.

I(4h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan 4h=4*0,25=1, sehingga:

I(4h) = $\int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2\, dx = \frac{1}{2} * 1 * (f_0 + 2f_4 + 2f_8 + f_{12})$ = 43261419121,59080000

Jadi nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Aitken = $I(h) - \frac{[\mathbf{I(h)-I(2h)}]^2}{\mathbf{I(h)-2I(2h)+I(4h)}}$

$= 12447548428,46820000 - \frac{[12447548428,46820000 - 21885057009,01120000]^2}{12447548428,46820000 - \mathbf{2} * 21885057009,01120000 + 43261419121,59080000}$

= 4987320528,96157000**.**

Kesalahan = $\frac{|8010129763,90985000 - 4987320528,96157000|}{8010129763,90985000}$ = 0,377373317 = 37,7373317%

c. Jawaban secara numerik dari $\int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2\, dx$ **,** dengan menggunakan h=0,05 (atau nilai n=60) adalah :

$f(x) = e^{0,1x^3}\, x^2$ dan h = 0,05

Dari hitungan di Ms.Excel, diperoleh data sebagai berikut :

Tabel 3. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari fungsi $f(x) = e^{0,1x^3}\, x^2$ dengan h = 0,05.

i	x_i	$f_i = f(x_i)$		i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	3,00	133,91758552		31	4,55	255222,74838653
1	3,05	158,78414182		32	4,60	357079,10076543
2	3,10	189,02971463		33	4,65	502925,30507528
3	3,15	225,96777614		34	4,70	713134,28340297
4	3,20	271,26646938		35	4,75	1018128,54079511
5	3,25	327,05308353		36	4,80	1463632,38060623

i	x_i	$f_i = f(x_i)$		i	x_i	$f_i = f(x_i)$
6	3,30	396,05177076		37	4,85	2118820,04658342
7	3,35	481,76584231		38	4,90	3089038,42224784
8	3,40	588,72010281		39	4,95	4535802,81879323
9	3,45	722,78439012		40	5,00	6708432,16302177
10	3,50	891,60743194		41	5,05	9994434,90525075
11	3,55	1105,20123111		42	5,10	15000304,80900780
12	3,60	1376,73177578		43	5,15	22681970,80814550
13	3,65	1723,59384581		44	5,20	34556881,07567540
14	3,70	2168,87881804		45	5,25	53051232,37551030
15	3,75	2743,38868054		46	5,30	82072506,58002230
16	3,80	3488,41282377		47	5,35	127960300,54898900
17	3,85	4459,57521230		48	5,40	201076885,36565800
18	3,90	5732,19097808		49	5,45	318487478,21920200
19	3,95	7408,76218536		50	5,50	508510379,11159300
20	4,00	9629,52060595		51	5,55	818499509,50681100
21	4,05	12587,33290469		52	5,60	1328256737,14926000
22	4,10	16548,88401511		53	5,65	2173323914,34396000
23	4,15	21884,94351183		54	5,70	3585745896,26340000
24	4,20	29113,84317652		55	5,75	5965968300,21756000
25	4,25	38964,27446267		56	5,80	10010654723,77070000
26	4,30	52466,49452915		57	5,85	16941732988,25040000
27	4,35	71085,53791157		58	5,90	28920158123,02860000
28	4,40	96916,88958840		59	5,95	49799458086,22100000
29	4,45	132975,56816958		60	6,00	86509401985,89160000
30	4,50	183625,71248040			-	-

Metode Ekstrapolasi Richardson

Rumus metode Ekstrapolasi Richardson adalah : $J = I(h) + \frac{\mathrm{I(h)-I(2h)}}{(2^q-1)}$**,** dengan:

I(h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan h=0,05

Dari data di tabel 3, maka:

I(h) = $\int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2\, dx = \frac{1}{2} * 0,05 * (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + 2f_{12} + 2f_{13} + 2f_{14} + 2f_{15} + 2f_{16} + 2f_{17} + 2f_{18} + 2f_{19} + 2f_{20} + 2f_{21} + 2f_{22} + 2f_{23} + 2f_{24} + 2f_{25} + 2f_{26} + 2f_{27} + 2f_{28} + 2f_{29} + 2f_{30} + 2f_{31} + 2f_{32} + 2f_{33} + 2f_{34} + 2f_{35} + 2f_{36} + 2f_{37} + 2f_{38} + 2f_{39} + 2f_{40} + 2f_{41} + 2f_{42} + 2f_{43} + 2f_{44} + 2f_{45} + 2f_{46} + 2f_{47} + 2f_{48} + 2f_{49} + 2f_{50} + 2f_{51} + 2f_{52} + 2f_{53} + 2f_{54} + 2f_{55} + 2f_{56} + 2f_{57} + 2f_{58} + 2f_{59} + f_{60})$ = 8209667709,35164000

I(2h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan 2h=2*0,05=0,1, sehingga:

I(2h) = $\int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2\, dx = \frac{1}{2} * 0,1 * (f_0 + 2f_2 + 2f_4 + 2f_6 + 2f_8 + 2f_{10} + 2f_{12} + 2f_{14} + 2f_{16} + 2f_{18} + 2f_{20} + 2f_{22} + 2f_{24} + 2f_{26} + 2f_{28} + 2f_{30} + 2f_{32} + 2f_{34} + 2f_{36} + 2f_{38} + 2f_{40} + 2f_{42} + 2f_{44} + 2f_{46} + 2f_{48} + 2f_{50} + 2f_{52} + 2f_{54} + 2f_{56} + 2f_{58} + f_{60})$

= 8795346821,76429000

Jadi nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Richardson = $I(h) + \frac{\mathrm{I(h)-I(2h)}}{(2^q-1)}$ = $8795346821,76429 + \frac{8795346821,76429000-10967583363,25900000}{(\mathbf{2^2-1})}$ = 8014441338,54742000

Kesalahan = $\frac{|8010129763,90985000-8014441338,54742000|}{8010129763,90985000}$ =0,000538265 = 0,0538265 %.

Metode Ekstrapolasi Aitken:

Rumus metode Ekstrapolasi Aitken adalah : $\mathrm{J} = \mathrm{I(h)} - \frac{[\mathrm{I(h)-I(2h)}]^2}{\mathrm{I(h)-2I(2h)+I(4h)}}$

I(h) dan I(2h) sudah dihitung pada metode ekstrapolasi Richardson.
I(4h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan 4h=4*0,05=0,2, sehingga:
$I(4h) = \int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2 \, dx = \frac{1}{2} * 0,2 * (f_0 + 2f_4 + 2f_8 + 2f_{12} + 2f_{16} + 2f_{20} + 2f_{24} + 2f_{28} + 2f_{32} + 2f_{36} + 2f_{40} + 2f_{44} + 2f_{48} + 2f_{52} + 2f_{56} + f_{60})$ = 10967583363,25900000

Jadi nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Aitken = $I(h) - \frac{[I(h) - I(2h)]^2}{I(h) - 2I(2h) + I(4h)}$ = $8209667709{,}35164000 - \frac{[8209667709{,}35164000 - 8795346821{,}76429000]^2}{8209667709{,}35164000 - 2 * 8795346821{,}76429000 + 10967583363{,}25900000}$ = 7993463734,36225000

Kesalahan = $\frac{|8010129763{,}90985000 - 7993463734{,}36225000|}{8010129763{,}90985000}$ = 0,002617476 = 0,2617476 %

d. Jawaban secara numerik dari $\int_3^6 e^{0,1x^3}\, x^2 \, dx$ **,** dengan menggunakan h=0,025 (atau nilai n=120) adalah :

Metode Ekstrapolasi Richardson :

Rumus metode Ekstrapolasi Richardson adalah : $J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{(2^q - 1)}$**,** dengan:

I(h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan h=0,025, dan dari Ms.Excel, maka didapat: I(h) = 8060223002,87437000 dan I(2h) = 8209667709,35386000.

Jadi nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Richardson = $I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{(2^q - 1)}$ = $8060223002{,}87437000 + \frac{8060223002{,}87437000 - 8209667709{,}35386000}{(2^2 - 1)}$
= 8010408100,71454000

Kesalahan = $\frac{|8010129763{,}90985000 - 8010408100{,}71454000|}{8010129763{,}90985000}$ = 0,00003475 = 0,003475 %.

Metode Ekstrapolasi Aitken:

Rumus metode Ekstrapolasi Aitken adalah : $J = I(h) - \frac{[\mathbf{I(h) - I(2h)}]^2}{\mathbf{I(h) - 2I(2h) + I(4h)}}$

I(h) dan I(2h) sudah dihitung pada metode ekstrapolasi Richardson di atas.
Dari hitungan di Ms.Excel, didapat I(4h) = 8795346821,76671000

Jadi nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Aitken = $I(h) - \frac{[I(h) - I(2h)]^2}{I(h) - 2I(2h) + I(4h)}$ = $8060223002{,}87437000 - \frac{[8060223002{,}87437000 - 8209667709{,}35386000]^2}{8209667709{,}35164000 - 2 * 8209667709{,}35386000 + \mathbf{8795346821{,}76671000}}$ = 8009026398,50073000

Kesalahan = $\frac{|8010129763{,}90985000 - 8009026398{,}50073000|}{8010129763{,}90985000}$ = 0,000137746= 0,0137746 %

Jawaban nomor 2:

Jawaban secara numerik $\int_1^4 e^{\sqrt{0,2x}} \left(5x^{8/3} - 3x^2\right) dx$**,** dengan menggunakan h=0,05 (atau nilai n=60) adalah :
$f(x) = e^{\sqrt{0,2x}}\left(5x^{8/3} - 3x^2\right)$ dan h = 0,05
Dari hitungan di Ms.Excel, diperoleh data sebagai berikut :

Tabel 4. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari fungsi f(x) = $f(x) = e^{\sqrt{0,2x}}\left(5x^{8/3} - 3x^2\right)$dengan h = 0,05.

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f_i = f(x_i)}$		i		$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f_i = f(x_i)}$
0	1,00	3,12789663		31		2,55	84,10117743
1	1,05	3,77500009		32		2,60	89,73351972
2	1,10	4,50269573		33		2,65	95,62062530
3	1,15	5,31585317		34		2,70	101,76893411
4	1,20	6,21938995		35		2,75	108,18493866
5	1,25	7,21827186		36		2,80	114,87518409
6	1,30	8,31751328		37		2,85	121,84626829
7	1,35	9,52217745		38		2,90	129,10484198
8	1,40	10,83737669		39		2,95	136,65760885

i	x_i	$f_i = f(x_i)$		i		x_i	$f_i = f(x_i)$
9	1,45	12,26827263		40		3,00	144,51132561
10	1,50	13,82007644		41		3,05	152,67280213
11	1,55	15,49804899		42		3,10	161,14890154
12	1,60	17,30750105		43		3,15	169,94654032
13	1,65	19,25379341		44		3,20	179,07268839
14	1,70	21,34233710		45		3,25	188,53436925
15	1,75	23,57859346		46		3,30	198,33866006
16	1,80	25,96807434		47		3,35	208,49269175
17	1,85	28,51634219		48		3,40	219,00364913
18	1,90	31,22901021		49		3,45	229,87877097
19	1,95	34,11174247		50		3,50	241,12535015
20	2,00	37,17025400		51		3,55	252,75073375
21	2,05	40,41031094		52		3,60	264,76232313
22	2,10	43,83773063		53		3,65	277,16757406
23	2,15	47,45838172		54		3,70	289,97399686
24	2,20	51,27818430		55		3,75	303,18915646
25	2,25	55,30310996		56		3,80	316,82067251
26	2,30	59,53918196		57		3,85	330,87621954
27	2,35	63,99247526		58		3,90	345,36352703
28	2,40	68,66911667		59		3,95	360,29037952
29	2,45	73,57528496		60		4,00	375,66461676
30	2,50	78,71721089					

Metode Ekstrapolasi Richardson :

Rumus metode Ekstrapolasi Richardson adalah : $J = I(h) + \frac{\mathrm{I(h)-I(2h)}}{(2^{q}-1)}$, dengan:

I(h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan h=0,05

Dari data di tabel 4, maka:

$\mathrm{I(h)} = \int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{0,2x}}\left(5x^{8/3} - 3x^2\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{2} * 0{,}05 * (\mathrm{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + 2f_{12} + 2f_{13} + 2f_{14} + 2f_{15} + 2f_{16} + 2f_{17} + 2f_{18} + 2f_{19} + 2f_{20} + 2f_{21} + 2f_{22} + 2f_{23} + 2f_{24} + 2f_{25} + 2f_{26} + 2f_{27} + 2f_{28} + 2f_{29} + 2f_{30} + 2f_{31} + 2f_{32} + 2f_{33} + 2f_{34} + 2f_{35} + 2f_{36} + 2f_{37} + 2f_{38} + 2f_{39} + 2f_{40} + 2f_{41} + 2f_{42} + 2f_{43} + 2f_{44} + 2f_{45} + 2f_{46} + 2f_{47} + 2f_{48} + 2f_{49} + 2f_{50} + 2f_{51} + 2f_{52} + 2f_{53} + 2f_{54} + 2f_{55} + 2f_{56} + 2f_{57} + 2f_{58} + 2f_{59} + f_{60}}) = 346{,}18814995$

I(2h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan 2h=2*0,05=0,1, sehingga: $\mathrm{I(2h)} = \int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{0,2x}}\left(5x^{8/3} - 3x^2\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{2} * 0{,}1 * (\mathrm{f_0 + 2f_2 + 2f_4 + 2f_6 + 2f_8 + 2f_{10} + 2f_{12} + 2f_{14} + 2f_{16} + 2f_{18} + 2f_{20} + 2f_{22} + 2f_{24} + 2f_{26} + 2f_{28} + 2f_{30} + 2f_{32} + 2f_{34} + 2f_{36} + 2f_{38} + 2f_{40} + 2f_{42} + 2f_{44} + 2f_{46} + 2f_{48} + 2f_{50} + 2f_{52} + 2f_{54} + 2f_{56} + 2f_{58} + f_{60}}) = 346{,}37554842$

Jadi nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Richardson = $\mathrm{I(h)} + \frac{\mathrm{I(h)-I(2h)}}{(2^{q}-1)} = 346{,}18814995 + \frac{346{,}18814995 - 346{,}37554842.}{(\mathbf{2^2-1})} = 346{,}12568380$

Metode Ekstrapolasi Aitken:

Rumus metode Ekstrapolasi Aitken adalah : $\mathrm{J = I(h)} - \frac{[\mathrm{I(h)-I(2h)}]^2}{\mathrm{I(h)-2I(2h)+I(4h)}}$

I(h) dan I(2h) sudah dihitung pada metode di atas

I(4h) adalah nilai integrasi dengan metode Trapesium dengan menggunakan 4h=4*0,05=0,2, sehingga: $\mathrm{I(4h)} = \int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{0,2x}}\left(5x^{8/3} - 3x^2\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{2} * 0{,}2 * (\mathrm{f_0 + 2f_4 + 2f_8 + 2f_{12} + 2f_{16} + 2f_{20} + 2f_{24} + 2f_{28} + 2f_{32} + 2f_{36} + 2f_{40} + 2f_{44} + 2f_{48} + 2f_{52} + 2f_{56} + f_{60}}) = 347{,}12510325$

Jadi nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Aitken = $\mathrm{I(h)} - \frac{[\mathbf{I(h)-I(2h)}]^2}{\mathbf{I(h)-2I(2h)+I(4h)}}$ = $346{,}18814995 - \frac{[346{,}18814995-346{,}37554842]^2}{346{,}18814995-\mathbf{2}*346{,}37554842+347{,}12510325}$ = 346,12567946

Jawaban nomor 3:

Diberikan tabel data sebagai berikut:

Tabel 5. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari fungsi f(x)

i	$\mathbf{x_i}$	$\boldsymbol{f}(\mathbf{x_i})$
0	0,5	1,616300
1	0,6	2,263429
2	0,7	3,103386
3	0,8	4,189755
4	0,9	5,590002
5	1,0	7,389056
6	1,1	9,693762
7	1,2	12,638417
8	1,3	16,391669
9	1,4	21,165112
10	1,5	27,223997
11	1,6	34,900555
12	1,7	44,610586

Dari data pada tabel 1 di atas, maka dihitung:

I(h) = $\frac{1}{2} * 0{,}1 * (\mathrm{f_0} + 2\mathrm{f_1} + 2\mathrm{f_2} + 2\mathrm{f_3} + 2\mathrm{f_4} + 2\mathrm{f_5} + 2\mathrm{f_6} + 2\mathrm{f_7} + 2\mathrm{f_8} + 2\mathrm{f_9} + 2\mathrm{f_{10}} + 2\mathrm{f_{11}} + \mathrm{f_{12}}) = 16{,}766258$

I(2h) = $\frac{1}{2} * 0{,}2 * (\mathrm{f_0} + 2\mathrm{f_2} + 2\mathrm{f_4} + 2\mathrm{f_6} + 2\mathrm{f_8} + 2\mathrm{f_{10}} + \mathrm{f_{12}})$= 17,023252

I(4h) = $\frac{1}{2} * 0{,}4 * (\mathrm{f_0} + 2\mathrm{f_4} + 2\mathrm{f_8} + \mathrm{f_{12}})$= 18,038046

Nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Richardson = $\mathrm{I(h)} + \frac{\mathrm{I(h)-I(2h)}}{(2^q-1)} = 16{,}766258 + \frac{16{,}766258-17{,}023252}{(\mathbf{2^2-1})}$ = 16,680594, sedangkan

Nilai integrasi dengan metode Ekstrapolasi Aitken = $\mathrm{I(h)} - \frac{[\mathbf{I(h)-I(2h)}]^2}{\mathbf{I(h)-2I(2h)+I(4h)}}$ = $16{,}766258 - \frac{[16{,}766258-17{,}023252]^2}{16{,}766258-\mathbf{2}*17{,}023252+18{,}038046} = 16{,}679104$

SIMPULAN

Dari hasil Analisa dari jawaban soal-soal integral tertentu di atas, didapatkan beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Dari soal integral tertentu yang bisa dihitung nilai integralnya secara analitik, maka bisa disimpulkan bahwa:
   a. Semakin banyak partisi yang dibuat untuk suatu area yang dihitung luasnya, maka hasil integral numerik yang dihitung baik menggunakan metode Ekstrapolasi Richardson maupun metode Ekstrapolasi Aitken semakin mendekati hasil analitiknya, sehingga kesalahannya semakin kecil.
   b. Untuk integral numerik yang menggunakan nilai h yang sama atau nilai n yang sama, maka hasil dari integral numerik dengan metode Ekstrapolasi Richardson selalu lebih baik atau lebih akurat dibandingkan dengan hasil integral numerik yang menggunakan metode Ekstrapolasi Aitken.
2. Untuk soal integral yang tidak bisa dihitung nilainya secara analitik, maka hasil integral dengan metode Ekstrapolasi Richardson maupun metode Ekstrapolasi Aitken hasilnya sama sampai ketelitian 5 angka di belakang koma.

3. Untuk soal integral yang berupa fungsi yang ditabulasikan, maka hasil integral dengan metode Ekstrapolasi Richardson maupun metode Ekstrapolasi Aitken hasilnya sama sampai ketelitian 3 angka di belakang koma..

DAFTAR PUSTAKA

Andelita, N., & Sudiarta, I. W. (2019, October 29). Penerapan metode relaksasi Gauss-Seidel untuk menyelesaikan persamaan Schrödinger. Jurnal Riset Dan Kajian Pendidikan Fisika, 6(2), 63. https://doi.org/10.12928/jrkpf.v6i2.14613

Chaghoub, S., & Benterki, D. (2020, September 8). Comparative numerical study between line search methods and majorant functions in barrier logarithmic methods for linear programming. Journal of Numerical Analysis and Approximation Theory, 49(1), 15–21. https://doi.org/10.33993/jnaat491-1199

Chapra, S.C. & Canale, R.P. (1991).“ Numerical Methods For Engineers with Personal Computer Applications”, Mc.Graw-Hill Book Company, New York.

Conte, D.S. & Carl de Boor, D.C.(1992). “ Dasar-Dasar Analisis Numerik, Suatu Pendekatan Algoritma”, Penerbit Erlangga.

Gismalla, D. (2016). The MATLAB Programs for Some Numerical Methods and Algorithms (II). SSRN Electronic Journal. https://doi.org/10.2139/ssrn.3534122

Karris, T.S.(2007). “ Numerical analysis using MATLAB and Excel”, Orchard Publications, California.

Klusalaas, J.(2005). “Numerical methods in engineering with MATLAB’, Cambridge Univ. Press.

Maghfiroh, R.E., Khusniah,R., Zaman, M.B. (2020). Pengaruh Ekstrapolasi Richardson Terhadap Keakuratan Solusi Numerik Persamaan Konduksi Panas., TENSOR, Vol.1, No.2, hal.57-64.

Maure, O. P., & Mungkasi, S. (2021, December 19). Verifikasi Tingkat Keakuratan Beberapa Metode Integrasi Numerik Fungsi Atas Satu Peubah Bebas. Jurnal Silogisme : Kajian Ilmu Matematika Dan Pembelajarannya, 6(1), 58. https://doi.org /10.24269/silogisme.v6i1.3540

Mulyono & Suryana, M.E. (2021). Kajian Sejumlah Metode Untuk Menghitung Integral Tentu Secara Numerik. Prosiding Seminar Nasional Sains Dan Teknologi ke-11, Diselenggarakan oleh Fakultas Teknik Universitas Wahid Hasyim Semarang, 27 Oktober 2021 (hal. 24-31). Diakses dari https://publikasiilmiah.unwahas.ac.id/ index.php/PROSIDING_SNST_FT/issue/view/306/showToc.

Mulyono & Suryana, M.E. (2022). Evaluasi Metode Kuadratur Gauss, Suatu Metode Untuk Menghitung Integral Tertentu Secara Numerik. Prosiding Seminar Nasional Sains Dan Teknologi ke-12, Diselenggarakan oleh Fakultas Teknik Universitas Wahid Hasyim Semarang, 26 Oktober 2022 (hal.369-375). Diakses dari https:// publikasiilmiah.unwahas.ac.id/index.php /PROSIDING _SNST_FT /issue/view/380

Mulyono, Suryana, M.E., Siswoyo,C.T., Rahmanto, A. (2022). Evaluasi dari metode: trapesium, simpson 1/3, simpson 3/8 dan newton cotes orde 4-10 untuk menghitung integral tertentu secara numerik., AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika Vol. 13, No. 3, hal. 466-479.

Munir, R.(2013).“ Metode Numerik “, Informatika Bandung, 271-297.

Nirsal (2014). Penggunaan Ekstrapolasi Untuk Menyelesaikan Fungsi Integral Tentu., Jurnal Ilmiah d’ComPutarE Vol.4, hal. 45-54.

Otto, S.R dan J.P. Denier, J.P. (2005). “An introduction to programming and numerical methods in MATLAB’, Springer – Verlag.

Radesa, A., . N., & Ginting, B. (2016, February 29). Integrasi Numerik Dengan Metode Kuadratur Gauss-Legendre Menggunakan Pendekatan Interpolasi Hermite Dan Polinomial Legendre. Jurnal Matematika UNAND, 5(1), 148. https://doi.org/ 10.25077/jmu.5.1.148-153.2016.

Salahuddin, T. (2023, September 27). Numerical Techniques in MATLAB. CRC Press.

Triatmodjo, B.(1992). “ Metode Numerik”, Beta Offset, 93-102.

Utami, L. S. (2018, January 27). Perbandingan Analisis Numerik Menggunakan Metode Secant dan Metode Iterasi Satu Titik Untuk Menentukan Koefisien Gesek Udara Pada Kubus Dan Silindris. Paedagoria | FKIP UMMat, 5(2), 43. https://doi.org/10.31764/paedagoria.v5i2.89

Yahya, Y., & Nur, A. M. (2018, July 31). Pengaruh Aplikasi C# dalam Proses Perhitungan Numerik Terhadap Solusi Persamaan Non Linier. Infotek : Jurnal Informatika Dan Teknologi, 1(2), 79–87. https://doi.org/10.29408/jit.v1i2.901

Yang, Y. (2016, July 26). CurveLP-A MATLAB implementation of an infeasible interior-point algorithm for linear programming. Numerical Algorithms, 74(4), 967–996. https://doi.org/10.1007/s11075-016-0180-1

Yang, W.Y, Cao, W., Kim, J., Park, K.W., Park, H.H, Joung, J., Ro, J.S., Lee, H.L., Hong, C.H., Taeho Im, T. (2020)..“Applied numerical methods using MATLAB”, Wiley-Interscience, Canada.

Zulfahri, Z., Arlenny, A., Situmeang, U., & Setiawan, D. (2022, April 27). Aplikasi Metode Newton Rapshon Untuk Menghitung Aliran Daya Menggunakan Program Matlab R2016a. JURNAL TEKNIK, 16(1), 109–115. https://doi.org /10.31849/ teknik. v16i1.9965