Jurnal Pendidikan dan Konseling
Volume 4 Nomor 6 Tahun 2022
E-ISSN: 2685-936X dan P-ISSN: 2685-9351
Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai

Analisis Implementasi Matriks pada Aplikasi Input-Output di Bidang Matematika Ekonomi

Chindy Permata[1], Dedek Kustiawati[2], Husna Fathinah[3], Harianti Agustina[4], Wirda Nur Indah[5]
[1,2,3,4,5] Pendidikan Matematika, UIN Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: dedek.kustiawati@uinjkt.ac.id

Abstrak

Matematika adalah ilmu yang bermanfaat di segala bidang kehidupan serta dapat melayani berbagai ilmu pengetahuan lain. Misalnya, model matematika melayani bidang ilmu ekonomi salah satunya menggunakan teori matriks dengan metode eliminasi Gauss Jordan dalam analisis input-output untuk menelaah suatu perekonomian yang saling berhubungan antar sektor. Dalam penelitian ini membahas mengenai analisis input-output yang merupakan implementasi dari materi matriks, dimana tiap-tiap sektor menggunakan output dari sektor lainnya sebagai input bagi output yang akan dihasilkan, sebaliknya output yang dihasilkan juga menjadi input bagi sektor lain. Selain sebagai input untuk sektor lain, ada juga output suatu sektor sebagai input bagi sektor dirinya sendiri serta sebagai barang konsumsi bagi konsumen akhir. Penelitian ini adalah penelitian kualitatif dengan pendekatan studi literatur (library research). Teknik pengumpulan data dilakukan dengan mengeksplorasi berbagai buku, jurnal, artikel dan sumber-sumber data atau informasi yang dianggap sesuai dengan kajian dan relevan. Teknik analisis data yang dilakukan adalah analisis isi dengan tujuan untuk menjaga tepatnya kajian dan mencegah terjadinya kesalahan sumber data, maka dilakukan pemeriksaan antar pustaka dan membaca kembali pustaka. Hasil dari penelitian ini adalah menentukan matriks transaksi, hubungan sektor-sektor ekonomi yang menghasilkan nilai tambah, koefisien teknis matriks input-output, dan matriks koefisien saling ketergantungan, serta menentukan permintaan akhir dengan menggunakan metode eliminasi Gauss Jordan.

Kata Kunci: *Matriks, Metode, Input-Output*

Abstract

Mathematics is a science that is useful in all areas of life and can serve various other sciences. For example, mathematical models serve the field of economics, one of which uses matrix theory with the Gauss Jordan elimination method in input-output analysis to study an economy that is interconnected between sectors. In this study, it discusses the input-output analysis which is the implementation of the matrix material, where each sector uses the output from other sectors as input for the output to be produced, otherwise the resulting output is also input for other sectors. Apart from being input for other sectors, there is also output of a sector as input for the sector itself as well as consumption goods for end consumers. This research is a qualitative research with a literature study approach (library research). Data collection techniques were carried out by exploring various books, journals, articles and sources of data or information deemed appropriate to the study and relevant. The data analysis technique used was content analysis with the aim of maintaining the accuracy of the study and preventing errors in data sources, then an examination was carried out between the literature and re-reading the literature. The results of this study are to determine the transaction matrix, the

relationship of economic sectors that generate added value, the technical coefficients of the input-output matrix, and the matrix of interdependence coefficients, and determine the final demand using the Gauss Jordan elimination method.
Keywords: *Matrix, Method, Input-Output*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu yang pastinya sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari karena pada dasarnya ilmu dasar ini dapat diaplikasikan dalam segala bidang kehidupan sehari-hari. Salah satu implementasi dari ilmu matematika yaitu pada bidang ekonomi yang menerapkan ilmu matriks. Matriks merupakan salah satu cabang dari ilmu aljabar linear. Sebagaimana sesuai dengan pernyataan pada (Listya & Herawati, 2007) penggunaan matriks untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear kali pertama diperkenalkan oleh Artur Cayley pada tahun 1857. Sehingga matriks dapat digunakan sebagai alat atau instrumen yang dapat digunakan untuk memecahkan suatu masalah. Pada dasarnya matriks adalah kumpulan bilangan, variabel, atau parameter (bilangan riil atau kompleks) yang disajikan secara terurut dalam baris dan kolom yang terbentuk empat persegi panjang dan termuat dalam kurung biasa ( ), atau kurung siku [ ], atau diantara dua pasang garis tegak rangkap ‖ ‖ (Wirawan, 2016). Bilangan, variabel atau parameter yang terdapat di dalam tanda kurung itu dinamakan anggota (elemen/unsur) dari matriks tersebut. Ukuran suatu matriks dapat dilihat dari $(m \times n)$ dengan m sebagai banyaknya baris dan n sebagai banyaknya kolom. Pada umumnya suatu matriks akan dilambangan dengan huruf kapital, dengan elemen-elemen yang dilambangkan dengan huruf kecil.

Seiring berjalannya waktu dengan perkembangan zaman yang semakin maju penerapan ilmu matrik menjadi sangat luas, hal ini juga berlaku dalam permasalahan ekonomi. Suatu pakar ekonomi pada umumnya akan menggunakan beberapa simbol matematis untuk menyatakan permasalahan yang terdapat dalam ilmu ekonomi. Salah satu perkembangan penerapan dari ilmu matriks dalam ilmu ekonomi ada pada analisis input-output. Analisis input-output dikembangkan pertama kali oleh seorang ekonom bernama Wassily W. Leontif, pada tahun 1930-an di Amerika (Rahayu & Nurhadiyono, 2012). Analisis input-output merupakan suatu analisis berdasarkan perekonomian negara secara komprhensif karena melihat keterkaitan antar sektor ekonomi disuatu negara tersebut secara menyeluruh (Masli & Rusmalia, 2015). Analisis input-output memiliki tujuan pada penerapannya dibidang ekonomi ini salah satunya untuk menelaah struktur perekonomian yang saling berkaitan antar sector atau kegiatan ekonomi. Selain itu analisis input-output juga digunakan untuk melacak berapa banyak tingkat output dari semua industri yang mesti diproduksi pada suatu pereonomian dan juga untuk melacak arus reproduksi dari berbagai sektor produksi sejak itu dari bahan mentah, barang setengah jadi sampai menjadi barang akhir. Dengan mengetahui arus produksi, maka dapat diperlajari pengaruh perubahan salah satu faktor produksi kepada barang akhir yang berhubungan (Yanti, 2015). Sebuah barang input (faktor produksi) tidak hanya dipakai untuk memproduksi suatu barang, tetapi mempunyai sifat multiguna. Demikian pula halnya dengan barang produksi (output) suatu sektor, terkadang untuk sektor produksi lain berperan sebagai faktor produksi (Wahyuni, 2013).

Pada analisis input-output ini matriks utama yang diperlukan yaitu, matriks transaksi, matriks koefisien teknis dan yang terakhir matriks koefisien saling ketegantungan (Hamidah et al., 2020). Tabel matriks input-output merupakan suatu sistem penyajian data perekonomian secara menyeluruh. Oleh karena itu, tabel matriks input-output guna mencakup seluruh komoditi dan kegiatan perekonomian, baik komoditi yang dihasilkan oleh sektor produksi dalam negeri (domestik) maupun komoditi yang berasal dari produksi luar negeri (impor) (Cahyono & Sumargo2, 2005). Pada kenyataannya, baarang dan jasa yang dihasilkan oleh sektor produksi beragam jenis dan bentuk fisik-nya. Akibatnya, jika setiap barang dan jasa yang berbeda tersebut dimunculkan sebagai satu sektor. Oleh karena itu, dalam proses penyusunan Tabel I-O, diperlukan suatu tahapan untuk mengelompokkan barang dan jasa ke dalam kelompok tertentu. Proses pengelompokan barang dan jasa inilah yang dikenal sebagai proses klasifikasi sektor (Firmansyah, 2006). Klasifikasi sektor tersebut mampu memperoleh informasi mengenai kontribusi masing-masing sektor.

Contoh: Produksi padi memerlukan input yang berupa tenaga kerja. Akan tetapi, produksi barang lain juga memerlukan tenaga kerja sebagai faktor produksi. Pada sektor pertanian padi memang merupakan output. Akan tetapi bagi sektor industri makanan misalnya, bisa jadi padi merupakan faktor produksi (input).

METODE

Metode penelitian ini adalah Studi Pustaka (Library Research). Studi Pustaka ini adalah pengumpulan suatu informasi dan data dengan bantuan berbagai macam material yang ada di perpustakan seperti buku, dokumen, majalah, kisah-kisah sejarah dsb (Mardalis:1999). Adapun metode pengumpulan data dalam penelitian ini diperoleh secara tidak langsung atau tidak turun langsung ke tempat observasi (Jannah & Harni, 2020). Studi perpustakaan ini mempelajari berbagai buku referensi serta hasil penelitian sebelumnya yang sejenis berguna untuk mendapatkan suatu landasan teori mengenai masalah yang akan diteliti oleh peneliti (Mhd. Habibu Rahman, 2021). Tujuan studi Pustaka untuk mengetahui pembahasan yang lebih mendalam mengenai suatu topik atau tema. Topik ini sesuai dengan tulisan yang akan dibahas oleh peneliti. Teknik Pegumpulan Data dengan menggunakan buku, literatur, jurnal serta berbagai laporan yang berkaitan dengan masalah yang akan diteliti. Sumber data penelitian ini adalah sekunder. Instrumen data dalam penelitian ini adalah studi Pustaka.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Matriks Transaksi

Tahap pertama dalam analisis input-output adalah membentuk suatu tabel yang memuat penjelasan-penjelasan mengenai bagaimana output suatu sektor terdistribusi kepada sektor-sektor lain sebagai input dan ke pemakai akhir sebagai barang konsumsi. Tabel inilah yang dinamakan dengan matriks transaksi atau matriks input-output (BPS, 2018). Berikut format matriks transaksi terlihat pada tabel di bawah ini:

Output Input	**Distribusi Konsumsi**	**Permintaan Akhir**	**Total Output**
Distribusi Produksi	$\begin{matrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \cdots & X_{2m} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & \cdots & X_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & X_{m3} & \cdots & X_{mm} \end{matrix}$	$\begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_m \end{matrix}$	$\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_m \end{matrix}$
Nilai Tambah	$Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad \cdots \quad Y_m$	U_{m+1}	X_{m+1}
Total Input	$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \cdots \quad X_m$	X_{m+1}	x

Tabel transaksi diatas, dapat dituliskan dalam bentuk notasi matriks, seperti keterangan-keterangan dibawah ini (Cahyono & Sumargo2, 2005):

X_{ij} = Melambangkan output dari sektor i yang dipergunakan sebagai output oleh sektor j.

U_i = Melambangkan permintaan akhir terhadap output sektor i.

Y_j = Melambangkan nilai tambah sektor j.

X_j = Melambangkan output total dari sektor j.

Sebuah bisnis yang merupakan kegiatan ekonomi memiliki beberapa sektor kegiatan. Tiap-tiap kegiatan sektor ini membentuk sistem ekonomi yang tidak luput dari input dan output, baik secara fisik maupun nilai uang. Dalam menjalankan pekerjaannya, setiap sektor pasti memerlukan output. Selain itu, sektor tersebut juga memberi output pada sistem atas hasil yang dilakukan. Dalam artinya, sektor tersebut juga menggunakan output dari sektor lain. Begitupun sebaliknya, sektor ini dapat juga digunakan oleh sektor lain. Serta, sektor juga memberikan output yang digunakan sebagai output sektor itu sendiri di pilih sebagai permintaan akhir yang dilimpahkan ke konsumen. Input dan output yang dimaksud adalah pemasukan dan kontes nilai dari/ke masing-masing sektor ekonomi. Sehingga kaitan input-output tersebut disajikan dalam bentuk tabel yang disebut dengan matriks transaksi.

Pemakaian total oleh sektor i:

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} + U_i \qquad i = 1, 2, \dots, m+1$$

Output total dari sektor j:

$$X_j = \sum_{i=1}^{m} X_{ij} + Y_j \qquad i = 1, 2, \dots, m+1$$

Dari matriks transaksi terlihat bahwa sektor j dalam memproduksi output sebanyak Xj dibutuhkan output dari 1 sampai sektor m juga nilai tambah tertentu. Hal itu menyatakan bahwa terdapat hubungan dan distribusi input-output antar sektor (Muttaqin, 2008).

Contoh Permasalahan Matriks Transaksi

Berikut adalah tabel transaksi yang menunjukkan hubungan input-output antar sektor dalam perekonomian negara Indonesia (triliun rupiah) (Wikarya, 2015).

Output	Distribusi Konsumsi			Permintaan Akhir	Total Output
Input	Pertanian	Industri	Jasa		
Pertanian	50	30	10	60	150
Industri	60	20	30	90	200
Jasa	40	10	50	80	180
Nilai Tambah	0	140	90	-	
Total Input	150	200	180		530

Cara membaca tabel diatas adalah:

Baris pertama: menunjukkan seluruh output senilai 150 triliun rupiah dari sektor pertanian, di mana digunakan sebagai input untuk sektornya sendiri 50 triliun rupiah, digunakan sebagai input oleh sektor industri sebesar 30 triliun rupiah, juga digunakan sebagai input oleh sektor jasa sebesar 10 triliun rupiah. Sementara, sisanya dibeli sebagai barang konsumsi oleh konsumen akhir sebesar 60 triliun rupiah.

Baris kedua: menunjukkan seluruh output senilai 200 triliun dari sektor industri, dimana digunakan sebagai input oleh sektornya sendiri sebesar 20 triliun rupiah, digunakan sebagai input oleh sektor pertanian sebesar 60 triliun rupiah, digunakan juga sebagai input oleh sektor jasa sebesar 30 triliun rupiah. Sementara, sisanya dibeli sebagai barang konsumsi oleh konsumen akhir sebesar 90 triliun rupiah.

Baris ketiga: menunjukkan seluruh output senilai 180 triliun dari sektor jasa, dimana digunakan sebagai input oleh sektornya sendiri sebesar 50 triliun rupiah, digunakan sebagai input oleh sektor pertanian sebesar 40 triliun rupiah, digunakan juga sebagai input oleh sektor industri sebesar 10 triliun rupiah. Sementara, sisanya dibeli sebagai barang konsumsi oleh konsumen akhir sebesar 80 triliun rupiah.

Baris keempat: menunjukkan masing-masing sektor menghasilkan nilai tambah. Dimana, nilai tambah oleh sektor pertanian bernilai 0, nilai tambah sebesar 140 triliun rupiah dihasilkan oleh sektor industri dan nilai tambah 90 triliun dihasilkan oleh sektor jasa.

Kolom pertama: menunjukkan seluruh input sebesar 150 triliun dari sektor pertanian, di mana input dari sektornya sendiri sebesar 50 triliun, input dari sektor industri sebesar 60 triliun, juga input dari sektor jasa sebesar 40 triliun rupiah. Sementara, sisanya adalah nilai tambah untuk sektor pertanian sebesar 0.

Kolom kedua: menunjukkan seluruh input sebesar 200 triliun dari sektor industri, di mana input dari sektor pertanian sebesar 30 triliun rupiah, input dari sektornya sendiri sebesar 20 triliun rupiah, juga input dari sektor jasa sebesar 10 triliun rupiah. Sementara, sisanya adalah nilai tambah untuk sektor industri sebesar 140.

Kolom ketiga: menunjukkan seluruh input sebesar 180 triliun dari sektor jasa, di mana input dari sektor pertanian sebesar 10 triliun rupiah, input dari sektor industri sebesar 30 triliun rupiah, juga input dari sektornya sendiri sebesar 50 triliun rupiah. Sementara, sisanya adalah nilai tambah untuk sektor jasa sebesar 90.

Kolom keempat: menunjukkan sisa input yang dibeli sebagai barang konsumsi oleh konsumen akhir, di mana sisa input dari sektor pertanian sebesar 60 triliun rupiah, sisa input dari sektor industri sebesar 90 triliun rupiah, juga input dari sektor jasa sebesar 80 triliun rupiah.

Nilai tambah atau disebut juga dengan input primer merupakan selisih antara nilai total output dengan nilai total input pada suatu sektor.

Kolom terakhir: menunjukkan nilai total output untuk setiap sektor. Sedangkan baris terakhir: menunjukkan nilai total input untuk setiap sektor. Di mana nilai total output harus sama dengan nilai total input pada masing-masing sektor.

Matriks dan Relasi

Matriks merupakan susunan atau kumpulan bilangan, simbol-simbol, maupun susunan skalar elemen-elemen berbentuk persegi panjang yang disusun dalam bentuk baris dan kolom. Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom (mxn) adalah (Rahayu et al., 2012).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Misal R adalah relasi dari

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$

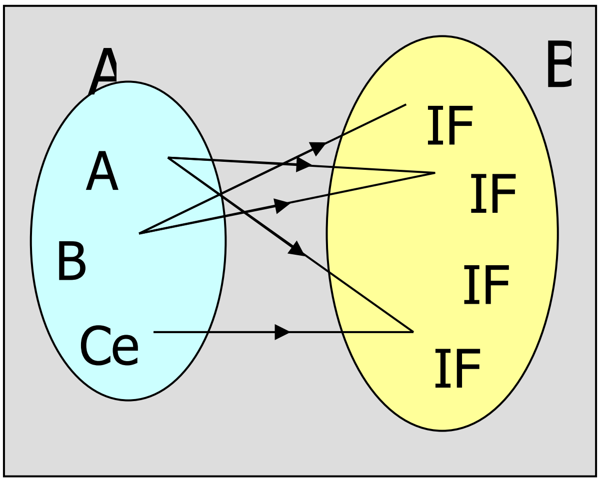
$$b_1 \qquad b_2 \qquad \cdots \qquad b_n$$

$$M = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_m \end{array} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan kata lain:

$$m_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, (a_i b_j) \in R \\ 0, (a_i b_j) \notin R \end{Bmatrix}$$

Contoh Permasalahan Matriks dan Relasi



Relasi pada gambar diatas dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Koefisien Teknis

Matriks koefisien, yaitu matriks yang entrinya disusun dari koefisien variabel pada suatu sistem persamaan linear. Matriks koefisien teknis ini sering juga disebut sebagai matriks koefisien input, bahkan sering juga disebut dengan matriks struktur biaya (Astuty & Ma'aruf, 2021). Misalnya, jika diberikan sistem persamaan linear dua variabel $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$, maka matriks koefisiennya adalah (3 – 2, 2 – 1).

Pada tabel transaksi diatas, diberikan suatu model matematika dalam bentuk persamaan linier sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = X_{11} + X_{12} + \cdots + X_{1n} + D_1 \\ X_2 = X_{21} + X_{22} + \cdots + X_{2n} + D_2 \\ \vdots \\ X_a = X_{a1} + X_{a2} + \cdots + X_{an} + D_n \end{array}\right\} (1)$$

Apabila nilai pada setiap unsur matriks transaksi dibagi dengan jumlah baris atau jumlah nilai kolom yang bersesuaian, maka dapat diperoleh perbandingan sebagai berikut :

$$a_{ij} \frac{X_{ij}}{X_j} \ (2)$$

Dimana i meneunjukkan jumlah baris dan j jumlah kolom pada koefisien tersebut ditempatkan. dengan demikian, matriks koefisien teknis bisa ditulis menjadi suatu matriks baru yang dilambangkan dengan matriks A, sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} (3)$$

Subtitusi persamaan (2) ke dalam persamaan (3), maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \cdots + a_{1n}X_{1n} + D_1 \\ X_2 = a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \cdots + a_{2n}X_{2n} + D_2 \\ \vdots \\ X_a = a_{n1}X_{a1} + a_{n2}X_{a2} + \cdots + a_{nn}X_{an} + D_n \end{array}\right\} (4)$$

Pindah semua variabel X pada ruas kanan persamaan (4) ke sisi sebelah kiri, maka diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{array}{l} X_1 - a_{11}X_{11} - a_{12}X_{12} - \cdots - a_{1n}X_{1n} = D_1 \\ X_2 - a_{21}X_{21} - a_{22}X_{22} - \cdots - a_{2n}X_{2n} = D_2 \\ \vdots \\ X_a - a_{n1}X_{a1} - a_{n2}X_{a2} - \cdots - a_{nn}X_{an} = D_n \end{array} \quad (5)$$

Apabila koefisien dari masing-masing variabel X pada persamaan (5) dapat ditulis ke dalam bentuk penulisan matriks, maka penulisannya sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1 - a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ D_n \end{bmatrix}$$

Atau dapat ditulis lebih sederhana lagi menjadi :

$(I - A)X = D$, sehingga didapat

X = $(I - A)^{-1}D$

Keterangan :

X = vektor output (variabel $X_1, X_2, \ldots, X_n$)

D = Vektor permintaan akhir (konstan)

I = Matriks identitas

A = Matriks koefisien teknis (matriks koefisien input)

$(I - A)$ = Matriks teknologi atau matriks Leontip

Matriks Kofisien Saling Ketergantungan

Matriks koefisien saling ketergantungan merupakan matriks yang diperoleh dari matriks leontif (matriks teknologi) yang sudah diinverskan, atau sering ditulis dengan simbol $(I - A)^{-1}$. (Zuhri, 2018). Untuk mendapatkan tingkat keseimbangan output X agar memenuhi permintaan antara dan permintaan akhir pada suatu perekonomian, maka diperlukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Membuat matriks transaksi.
2. Membuat matriks koefisien teknis atau input $\frac{X_{ij}}{X_j}$
3. Menghitung matriks teknologi atau matriks leontif $(I - A)$.
4. Mencari invers dari matriks teknologi $(I - A)^{-1}$, apabila matriks tersebut ada.
5. Menghitung dengan cara mengalikan matriks invers dengan vektor permintaan akhir D, agar memperoleh nilai output X.

Contoh kasus analisis input-output memiliki target permintaan akhir yang terlihat pada tabel I sebagai berikut :

Tabel 2. Tabel Matriks Koefisien Teknis

		Permintaan Antara		
		Pertanian	**Industri**	**Jasa dan lainnya**
Input Antara	Pertanian	0,4168	0,2331	0,1417
	Industri	0,0897	0,2664	0,2077
	Jasa dan lainnya	0,2568	0,1302	0,1684

Matriks transaksi yang disederhanakan (dalam jutaan rupiah)

$$A = \begin{bmatrix} 0,4168 & 0,2331 & 0,1417 \\ 0,0897 & 0,2664 & 0,2077 \\ 0,2568 & 0,1302 & 0,1684 \end{bmatrix}$$

Matriks teknologi atau leontif yang diperoleh dengan cara mengurangkan matriks identitas (I) dengan matriks koefisien teknis atau input (A). memiliki hasil :

$$(\mathrm{I}-\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4168 & 0,2331 & 0,1417 \\ 0,0897 & 0,2664 & 0,2077 \\ 0,2568 & 0,1302 & 0,1684 \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{I}-\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 0,8532 & -0,2331 & -0,1417 \\ -0,0897 & 0,7336 & -0,2077 \\ -0,2568 & -0,1302 & 0,8316 \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks Leontif $(\mathrm{I}-\mathrm{A})$ atau matriks saling ketergantungan dapat diperoleh dengan menggunakan metode adjoin dan determinan sebagai berikut :

$$|\mathrm{I}-\mathrm{A}| = 0,8532 \begin{vmatrix} 0,7336 & -0,2077 \\ -0,1302 & 0,8316 \end{vmatrix} + 0,2331 \begin{vmatrix} -0,0897 & -0,2077 \\ -0,2568 & 0,8316 \end{vmatrix} - 0,1417 \begin{vmatrix} -0,0897 & 0,7336 \\ -0,2568 & -0,1302 \end{vmatrix}$$

$$|\mathrm{I}-\mathrm{A}| = 0,8532\,(0,6101 - 0,0270) + 0,2331(-0,0746 - 0,5333) - 0,1417(0,0117 + 0,1884)$$

$$|\mathrm{I}-\mathrm{A}| = 0,8532\,(0,5831) + 0,2331(-0,6079) - 0,1417(0,2001)$$

$$|\mathrm{I}-\mathrm{A}| = 0,4975 - 0,1417 - 0,0284 = 0,3274$$

Matriks kofaktor C adalah :

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0,7336 & -0,2077 \\ -0,1302 & 0,8316 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0,0897 & -0,2077 \\ -0,2568 & 0,8316 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0,0897 & 0,7336 \\ -0,2568 & -0,1302 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0,2331 & -0,1417 \\ -0,1302 & 0,8316 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,8532 & -0,1417 \\ -0,2568 & 0,8316 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,8532 & -0,2331 \\ -0,2568 & -0,1302 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0,2331 & -0,1417 \\ 0,7336 & -0,2077 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,8532 & -0,1417 \\ -0,0897 & -0,2077 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,8532 & -0,2331 \\ -0,0897 & 0,7336 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} (0,6101 - 0,0270) & (-0,0746 - 0,5333) & (0,0117 + 0,1884) \\ (0,1938\ + 0,0184) & (0,7095 - 0,0364) & (-0,1111 - 0,0599) \\ (0,0484 + 0,1039) & (-0,1772 - 0,0127) & (0,6259 - 0,0209) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0,5831 & 0,6079 & 0,2001 \\ 0,2122 & 0,6731 & 0,1710 \\ 0,1524 & 0,1889 & 0,6050 \end{bmatrix}$$

Matriks adjoin $(\mathrm{I}-\mathrm{A})$ adalah matriks kofaktor C yang di transpose, sehingga

$$\mathrm{Adj}\ (\mathrm{I}-\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 0,5831 & 0,2122 & 0,1524 \\ 0,6079 & 0,6731 & 0,1889 \\ 0,2001 & 0,1710 & 0,6050 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian invers dari matriks Leontif adalah

$$|\mathrm{I}-\mathrm{A}|^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{I}-\mathrm{A}|}\,Adj(\mathrm{I}-\mathrm{A})$$

$$= \frac{1}{0,3274} \begin{bmatrix} 0,5831 & 0,2122 & 0,1524 \\ 0,6079 & 0,6731 & 0,1889 \\ 0,2001 & 0,1710 & 0,6050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,7810 & 0,0694 & 0,4655 \\ 1,8567 & 0,2204 & 0,5770 \\ 0,6112 & 0,5223 & 1,8479 \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh nilai-nilai output X, rumus yang digunakan adalah X = $|\mathrm{I} - \mathrm{A}|^{-1}\mathrm{D}$

Dengan demikian, nilai output $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$adalah

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}7810 & 0{,}0694 & 0{,}4655 \\ 1{,}8567 & 0{,}2204 & 0{,}5770 \\ 0{,}6112 & 0{,}5223 & 1{,}8479 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.420 \\ 6.566 \\ 5.742 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.905{,}601 \\ 22.250.394 \\ 19.797{,}568 \end{bmatrix}$$

Jadi, agar bisa memenuhi tingkat permintaan akhir, sektor pertanian (X_1), sektor industri (X_2), dan sektor jasa dan lainnya (X_3) harus menghasilkan output berturut-turut senilai Rp19.905,601 juta, Rp22.250.394 juta, dan Rp19.797,568 juta.

Matriks Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Selanjutnya, digunakan metode eliminasi Gauss Jordan. Biasanya metode eliminasi Gauss Jordan adalah cara yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan linear (Anam & Arnas, 2019). Di mana metode ini melakukan pengolahan dasar baris atau pengolahan dasar kolom dari suatu matriks. Metode eliminasi Gauss mengolah matriks koefisien menjadi matriks segitiga atas. Namun, apabila pengolahan tidak berhenti pada matriks segitiga atas, akan tetapi berlanjut sampai matriks indentitas maka pengolahan disebut Metode eliminasi Gauss Jordan. Jadi metode eliminasi Gauss Jordan ini merupakan variasi dari metode eliminasi Gauss yang lebih sederhana. Berikut bentuk matriks eliminasi Gauss Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdot & \cdot \; \cdot & X_{1m} & U_1 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \cdot & \cdot \; \cdot & X_{2m} & U_2 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & \cdot & \cdot \; \cdot & X_{3m} & U_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ X_{m1} & X_{m2} & X_{m3} & \cdot & \cdot \; \cdot & X_{mm} & U_m \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \; \cdot & 0 & U_1{}' \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \; \cdot & 0 & U_2{}' \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \; \cdot & 0 & U_3{}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \; \cdot & 1 & U_m{}' \end{array}\right)$$

Contoh permasalahan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss Jordan:

Berikut adalah tabel yang menunjukkan hasil analisis input-output antar sektor PT INDOAGRO (dalam triliun rupiah):

Output / Input	Sektor Tujuan			Total Output
	Pertanian	**Manufaktur**	**Jasa**	
Pertanian	2	1	4	16
Manufaktur	3	2	1	10
Jasa	1	3	3	16

Tentukan barang konsumsi yang dibeli oleh konsumen akhir untuk masing-masing sektor agar terpenuhinya tingkat permintaan (output total)?

Penyelesaian:

Dari tabel diatas, langkah pertama mengubah ke dalam bentuk matriks eliminasi Gauss Jordan dan dilanjutkan dengan sistem pengoperasian metode eliminasi Gauss Jordan sebagai berikut:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{H_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{31}{}^{(-1)}]{H_{21}{}^{(-3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 & -14 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_2^{(2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{32}\left(-\frac{5}{2}\right)]{H_{12}\left(-\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 22 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 26 & 78 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_3\left(\frac{1}{26}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 22 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{23}^{(10)}]{H_{13}^{(-7)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Jadi, agar terpenuhinya tingkat permintaan (output) sektor terbuka maka diperoleh hasil yaitu, dari sektor pertanian sebesar 1 triliun rupiah dibeli sebagai barang konsumsi oleh konsumen akhir, dari sektor industri sebesar 2 triliun rupiah dibeli sebagai barang konsumsi oleh konsumen akhir dan sektor jasa sebesar 3 triliun rupiah dibeli sebagai barang konsumsi oleh konsumen akhir.

SIMPULAN

Analisis input-output memiliki tujuan pada penerapannya dibidang ekonomi ini salah satunya untuk menelaah struktur perekonomian yang saling berkaitan antar sector atau kegiatan ekonomi. Pada analisis input-output ini matriks utama yang diperlukan yaitu, matriks transaksi, matriks koefisien teknis dan yang terakhir matriks koefisien saling ketegantungan.

Tahap pertama dalam analisis input-output adalah membentuk suatu tabel yang memuat penjelasan-penjelasan mengenai bagaimana output suatu sektor terdistribusi kepada sektor-sektor lain sebagai input dan ke pemakai akhir sebagai barang konsumsi. Analisis input-output dapat diterapkan pada ilmu matriks. Matriks merupakan susunan atau kumpulan bilangan, simbol-simbol, maupun susunan skalar elemen-elemen berbentuk persegi panjang yang disusun dalam bentuk baris dan kolom.

Adapun pengertian dari matriks koefisien, yaitu matriks yang entrinya disusun dari koefisien variabel pada suatu sistem persamaan linear. Sehubungan dengan itu, terdapat Matriks koefisien saling ketergantungan yang memiliki arti yaitu matriks yang diperoleh dari matriks leontif (matriks teknologi) yang sudah diinverskan. Selanjutnya, analisis input-output menggunakan metode eliminasi Gauss Jordan. Dimana metode ini melakukan pengolahan dasar baris atau pengolahan dasar kolom dari suatu matriks dan mengolah matriks koefisien menjadi matriks segitiga atas.

DAFTAR PUSTAKA

Anam, K., & Arnas, Y. (2019). Penerapan Metode Eliminasi Gauss-Jordan Pada Rangkaian Listrik Menggunakan Scilab. *Jurnal Ilmiah Aviasi Langit Biru*, *12*(2), 37–44.

Astuty, S., & Ma'aruf, M. I. (2021). *Ekonomi Matematika: Aljabar Kalkulus dan Aljabar Matriks* (U. N. Halizah (ed.)). Yayasan Pendidikan Cendikia Muslim.

BPS. (2018). *Buku Tabel Input Output Kabupaten Tegal 2016*.

Cahyono, B., & Sumargo2, B. (2005). Mengartikulasikan tabel. *Journal The Winners*, *6*(1), 33–50.

Firmansyah. (2006). *Operasi Matrix dan Analisis Input-Output (I-O) untuk Ekonomi*.

Hamidah, Mahuda, I., & Kusuma, J. W. (2020). *Matematika Ekonomi 1&2*. Scorpindo Media Pustaka.

Jannah, T. M., & Harni. (2020). Penerapan Pendekatan Saintifik Dalam Pembelajaran Tematik Terpadu Di Kelas II Sekolah Dasar (Studi Literatur). *Journal of Basic Education Studies*, *8*(8), 405–420. http://ejournal.unp.ac.id/students/index.php/pgsd

Listya, T. D., & Herawati. (2007). *Matematika*. Grafindo Media Pratama.

Masli, L., & Rusmalia, E. (2015). Analisis Input-Output Dalam Perencanaan Ekonomi. *Jurnal Ekonomi*, *12*(3), 60–65.

Mhd. Habibu Rahman. (2021). Implementasi Model Pembelajaran Discovery Dalam Pendidikan Anak Usia Dini. *Early Childhood: Jurnal Pendidikan*, *5*(2), 223–240.

Muttaqin, G. F. (2008). *Metode Analisis Relasi Pemasukan dan Pengeluaran dalam Bisnis dan Ekonomi dengan Matriks Teknologi*.

Rahayu, Y., & Nurhadiyono, B. (2012). Staf Pengajar STMIK Sinar Nusantara Surakarta Jurnal Ilmiah SINUS……………. 7. *Techno COM*, *11*(2), 74–81.

Rahayu, Y., Rahayu, Y., & Nurhadiyono, B. (2012). Implementasi Matriks Pada Matematika Bisnis Dan Ekonomi. *Techno.Com*, *11*(2), 74–81.

Wahyuni, R. (2013). *Analisis Identifikasi Sektor Unggulan di Provinsi Jawa Timur Tahun 2010 (Pendekatan Input-Output)*. *2010*.

Wikarya, U. (2015). Analisis Model Input-Output. *Pelatihan Staf Puslitbang Penyelenggara Pos Dan Telekomunikasi*, 1–44. http://www.opi.lipi.go.id/data/1381625854/data/1439949174.pdf

Wirawan, N. (2016). *Matematika Ekonomi Lanjutan*.

Yanti, T. S. (2015). Menaksir Matriks Teknologi Tabel Input Output Kota Bandung Menggunakan Metode RAS. *Statistika*, *15*(1), 7–15.

Zuhri. (2018). Model Input Output dan Aplikasinya pada Enam Sektor. *Jurnal Ilman*, *3*(February 2015), 16–21.