Jurnal Pendidikan dan Konseling
Volume 4 Nomor 6 Tahun 2022
E-ISSN: 2685-936X dan P-ISSN: 2685-9351
Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai

Penerapan Matriks dalam Pembelajaran Matematika terhadap Analisis Input Output

Neneng Maulida[1], Dedek Kustiawati[2], Azka Annisa Bilqis[3], Ramadhan Kusumo Wicaksono[4], Sintia Dewi Rizki[5]
[1,2,3,4,5] Prodi Pendidikan Matematika, UIN Syarif Hidayatullah Jakarta, Indonesia
Email: dedek.kustiawati@uinjkt.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang solusi penyelesaian input-output yang termasuk salah satu implementasi matriks dalam bidang matematika ekonomi. Hal ini bertujuan untuk menganalisis struktur perekonomian yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari terkait sektor-sektor dalam perekonomian. Matriks juga merupakan salah satu materi dalam pembelajaran matematika di tingkat SMA. Sehingga matriks merupakan dasar yang harus dipelajari sebelum dapat mengimplementasikan analisis input-output Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif yang menggunakan study kepustakaan. Peneliti mengumpulkan berbagai informasi yang berhubungan dengan topik yang dikaji, baik melalui buku, artikel, jurnal, dan modul pembelajaran. Tujuan dari penulisan artikel ini yaitu, agar pembaca mengetahui penerapan-penerapan matriks dalam pembelajaran matematika.
Kata Kunci: *Ekonomi, Input-Output, Matematika Matriks*.

Abstract

This study discusses input-output settlement solution which's one of matrix implementations in field economic mathematics. It aims to analyze the structure of economy that's often found in everyday life related to sectors in economy. The matrix also one of materials in learning mathematics at the high school level. So that the matrix is basis that must studied before implementing input-output analysis. This research uses descriptive approach using literature study. Researchers collect various information related topics studied, either through books, articles, journals, and learning modules. The purpose of writing this article is readers know the applications of matrices in learning mathematics.
Keywords: *Economics, Input-Output, Mathematical, Matrix.*

PENDAHULUAN

Matematika menurut Rahayu et al., (2012) merupakan ilmu yang mendasari dan melayani berbagai ilmu pengetahuan lain karena sangat diperlukan untuk keperluan perkembangan teknologi dan ilmu pengetahuan modem. Sehingga, peran matematika sebagai ilmu dasar sangatlah penting untuk mengkaji semua ilmu di alam semesta ini, dengan tujuan untuk memberikan perkembangan teknologi yang bisa dimanfaatkan oleh manusia. Dalam perkembangannya berbagai masalah timbul misalnya dalam bidang ekonomi, industri, pertanian serta kesehatan. Hal ini selaras dalam (Munasiah et al., 2020), matematika berperan penting dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, baik dalam bidang sosial, ekonomi, maupun sains.

Matematika ekonomi merupakan suatu cabang ilmu yang terdapat dalam matematika terapan dan ekonomi, dengan masalah yang disajikan berkaitan dengan masalah-masalah ekonomi yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Penyelesaian masalah yang terdapat dalam matematika ekonomi dapat menggunakan analisis matematika.

Menurut Ahmad (2021) matematika ekonomi membahas masalah yang berkaitan dengan ilmu ekonomi menggunakan pendekatan serta lambang-lambang ekonomi. Dalam hal ini, memanfaatkan konsep dan teknik perhitungan yang relevan untuk memecahkan masalah-masalah ekonomi. Dalam mempelajari matematika ekonomi, terdapat topik-topik dalam matematika murni yang digunakan seperti fungsi, kalkulus, himpunan, deret dan matriks.

Matriks dapat digunakan untuk analisis input-output. Dalam (Ahmad, 2021), implementasi analisis input-output dalam matematika ekonomi untuk menentukan berapa banyak tingkat output dari setiap industri yang harus diproduksi dalam suatu perekonomian, agar dapat memenuhi total permintaan terhadap produk secara pasti. Langkah awal dalam analisis input-output adalah diperlukan 3 macam matriks utama yaitu matriks transaksi, matriks-matriks koefisien teknis, dan matriks koefisien total.

Dalam pembelajaran matematika di tingkat SMA, matriks sering digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan ekonomi. Untuk analisis input-output digunakan menentukan berapa banyak tingkat output dari setiap industri yang harus diproduksi dalam suatu perekonomian, agar supaya dapat memenuhi total permintaan terhadap produk secara pasti.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan pendekatan deskriptif dan jenis penelitian menggunakan study kepustakaan (library research), yaitu mengumpulkan informasi-informasi yang berhubungan dengan literatur review dan bersifat kepustakaan.. Literatur review adalah suatu kajian ilmiah yang berfokus pada satu topik tertentu. Literatur review memberikan gambaran mengenai perkembangan suatu topik tertentu. Pencarian literature baik internasional maupun nasional yang dilakukan dengan menggunakan Scoolar, Garuda, dan lain-lain. Pencarian artikel jurnal diperoleh lebih dari 10 artikel. Review literatur adalah sebuah metode yang sistematis, eksplisit dan reprodusibel untuk melakukan identifikasi, evaluasi dan sintesis terhadap karya-karya hasil penelitian dan hasil pemikiran yang sudah dihasilkan oleh para peneliti dan praktisi (Okoli & Schabram;Ring, Ritchie, mandava & Jepson, 2011). Kajian pustaka merupakan bagian penting dalam sebuah penelitian yang kita lakukan. Kajian pustaka disebut juga kajian literature, atau literature review. Sebuah kajian pustaka merupakan sebuah uraian atau deskripsi tentang literature yang relevan dengan bidang atau topik tertentu. Ia memberikan tinjauan mengenai apa yang telah dibahas atau yang telah dibicarakan oleh peneliti atau penulis, teori atau hipotesis yang mendukung, permasalahan penelitian yang diajukan atau ditanyakan, metode dan metodologi yang sesuai.

Kajian literature merupakan alat yang penting sebagai contect review, karena literature sangat berguna dan sangat membantu dalam member konteks dan arti dalam penulisan yang sedang dilakukan serta melalui kajian literature ini juga peneliti dapat menyatakan secara eksplisit dan pembaca mengetahui, mengapa hal yang inigin diteliti merupakan masalah yang memang harus diteliti, baik dari segi subjek yang akan diteliti dan lingkungan manapun dari sisi hubungan penelitian dengan tersebut dengan penelitian lain yang relevan. Pengertian kajian pustaka secara umum adalah bahasan atau bahan-bahan bacaan yang terkait dengan suatu topic atau temuan dalam penelitian. Kajian literature merupakan suatu analisis dan sisntesis informasi, yang memusatkan perhatian pada temuan-temuan dan bukan kutipan bibliografi yang sederhana, meringkas substansi literature dan mengambil kesimpulan dari suatu isi literatur tersebut.

Tujuan dari penulisan artikel ini yaitu, agar pembaca mengetahui penerapan-penerapan matriks dalam pembelajaran matematika. Pembaca juga bisa mengetahui analisis input-output dalam pembelajaran.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Matriks

1. Pengertian Matriks dan Relasi

Matriks adalah studi aljabar yang menawarkan banyak keuntungan tidak hanya untuk aplikasi matematika, tetapi juga untuk bidang matematika lainnya seperti statistik dan angka. Penerapan matriks memungkinkan matematikawan untuk menyederhanakan masalah matematika dengan mudah. Matriks karena itu poin kunci di bidang aljabar.

Menurut Simangunsong (2016) matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun secara baris dan kolom (atau membentuk pola persegi Panjang), dan ditempatkan didalam kurung biasa atau kurung siku. Bilangan-bilangan pembentuk matriks disebut elemen-elemen matriks. Elemen dari sebuah matriks A yang berada pada baris ke-i dan kolom ke-j dinotasikan dengan a_{ij}.

Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom (m x n) adalah:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Secara singkat sebuah matriks A dapat dinotasikan sebagai berikut :

$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ atau $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

Dengan :

$$a_{ij} = elemen\ atau\ unsur\ matriks$$
$$i = 1,2,3, \dots, m\ (indeks\ baris)$$
$$j = 1,2,3, \dots, n\ (indeks\ kolom)$$

Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [mij]$,

$$M = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix}$$

Yang dalam hal ini bahwa

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in \mathcal{R} \\ 0, & (a_i, b_j) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

2. Jenis-Jenis Matriks

Berikut ini adalah pengertian dari beberapa jenis jenis matriks dan sifat sifatnya yang berkaitan dengan penelitian ini. Menurut Lipschut (2004) Suatu matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama dinotasikan dengan $A_{n\times n}$, disebut matriks bujur sangkar atau matriks kuadrat. Bentuk umum dari matriks bujur sangkar ditulis sebagai berikut:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika suatu matriks bujur sangkar $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ disebut singular apabila $det(A) = 0$. Jika $det(A) \neq 0$ maka A disebut matriks nonsingular dan didefinisikan sebagai berikut :

Suatu matriks bujur sangkar disebut singular apabila $det(A) = 0$. Jika $det(A) \neq 0$ maka A disebut nonsingular. Matriks yang singular tidak mempunyai invers. Sedangkan matriks nonsingular mempunyai invers (Simangunsong, 2016).

Suatu matriks $I_n = (a_{ij})$ dengan semua elemen diagonal utamanya bernilai satu dan elemen di luar diagonalnya adalah nol disebut matriks identitas. Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times$. A disebut matriks identitas, jika

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & jika\ i = j \\ 0, & jika\ i \neq j \end{cases}$$

untuk $i, j = 1, \dots, n$. Matriks identitas dinyatakan dengan I. Maka dapat dinotasikan dengan (Leon, 2001):

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Selain matriks identitas, terdapat definisi dari matriks segitiga bawah dan matriks segitiga atas sebagai berikut :

Menurut Anton (2014) matriks segitiga atas (upper triangular) dikatakan jika matriks bujur sangkar yang semua elemen dibawah diagonal utamanya adalah nol. Matriks-matriks segitiga atas secara umum dapat di bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sedangkan matriks segitiga bawah (lower tringular) adalah matriks bujur sangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya adalah nol.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $m \times$. Transpos matriks , ditulis $A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]$ dan didefinisikan sebagai matriks berordo $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A, dan seterusnya. Berdasarkan teorema yang dijelaskan oleh Leon (2001), Jika A^T adalah transpos matriks A maka $(A^T)^T = A$. Serta teorema yang dijelaskan oleh Anton (2014) Jika A adalah matriks segitiga atas(bawah) maka A^T adalah matriks segitiga bawah(atas).

3. Operasi Pada Matriks
   a. Penjumlahan dan Pengurangan Dua Matriks

      Duah buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan jka kedua matriks tersebut berordo sama. Menurut Sessu (2014) penjumlahan dan pengurangan dua matriks dapat didefinisikan sebagai berikut, misalkan A dan B adalah matriks-matriks dengan ordo $m\ x\ n$ dan memiliki elemen a_{ij} dan b_{ij}. Jika matriks C adalah jumlah matriks A dengan matriks B atau C adalah hasil pengurangan matriks A dengan B, maka matriks C juga berordo $m\ x\ n$ dengan elemen-elemen yang ditentukan oleh:

      $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (untuk semua *i* dan *j*)

      $C_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ (untuk semua *i* dan *j*)

Contoh :

Jika P = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ dan Q = $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$, maka

P + Q = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

P – Q = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$

b. Perkalian Dua Matriks

Suatu matriks A dapat dikalikan dengan matriks B bila banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B. Misalkan matriks A berordo $m\ x\ n$ dan matriks B berordo $n\ x\ p$. Jika C merupakan hasil kali matriks A dan B atau AB = C, maka C berordo $m\ x\ p$, Sessu, 2014..

$$A_{(mxn)}B_{(nxp)} = C_{(mxp)}$$

Contoh :

Jika A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, maka

AB = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$

4. Determinan Matriks

Suatu fungsi yang daerah asalnya adalah elemen-elemen dari suatu matriks persegi berordo 2 dan wilayah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real merupakan definisi dari determinan matriks (Sessu, 2014).

Determinan dari suatu matriks dapat dilambangkan :

Det A atau |A|

Misalkan matriks A berordo 2x2,

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ nilai determinan matriks A dapat ditentukan oleh:

det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ = $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$

Misalkan matriks A berordo 3x3,

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ nilai determinan matriks A dapat ditentukan oleh:

Menggunakan cara Sarrus

|A| = $\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

= $(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Menggunakan cara Kofaktor

|A| = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

5. Invers Matriks

Invers matriks A merupakan matriks yang apabila dikalikan dengan matriks A, maka hasil perkalian antara matriks A dengan inversnya akan menghasilkan matriks identitas, dapat ditulis dengan notasi AA-1 = I (Arif, 2013).

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$, dengan adj = transpose dari matriks kofaktor.

Misalkan matriks A berordo 2x2,

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dengan nilai det A = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Invers matriks A dapat diperoleh:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Misalkan matriks A berordo 3x3,

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \\ 5 & 6 \end{matrix} = -99$$

$$\text{Matriks kofaktor} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 21 & 31 \\ -21 & 18 & 3 \\ -8 & -12 & -13 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj(A)$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{99}\begin{pmatrix} -19 & -21 & -8 \\ 21 & 18 & -12 \\ 31 & 3 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{99} & \frac{7}{33} & \frac{8}{99} \\ -\frac{7}{33} & -\frac{2}{11} & \frac{4}{33} \\ -\frac{31}{99} & -\frac{1}{33} & \frac{12}{99} \end{pmatrix}$$

Analisis Input-Output

Analisis *Input-Ouput* (I-O) adalah suatu model matematis untuk menganalisis keterkaitan antar sektor dalam suatu perekonomian. Analisis ini pertama kali dikenalkan dan dikembangkan oleh Wassily Leontief pada tahun 1930-an (Wirawan, 2016). Analisis *input-output* didasarkan dari gagasan bahwa sistem perekonomian suatu negara terbagi menjadi sejumlah sektor atau industri yang berbeda-beda dan saling berkaitan satu sama lainnya. Saling keterkaitan ini berarti bahwa setiap industri memerlukan input dari industri lainnya untuk menghasilkan output-nya. Kemudian output-nya ini diperlukan juga sebagai input oleh industri-industri lainnya untuk menghasilkan *output* mereka (Kalangi, 2019). Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyusun proyeksi target capaian pembangunan suatu daerah melalui analisis dampak yang ditimbulkan pada masing-masing sektor ekonomi yang tercantum dalam tabel merupakan pengertian dari Analisis I-O (Firmansyah et al., 2020).

Peran sektor terhadap sektor lainnya dalam perekonomian dapat dilakukan dengan menggunakan analisis input-output sudah pernah dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya. Suryani (2013) meneliti peran sektor ekonomi terhadap pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Pemalang menggunakan analisis tabel input-output. Penelitian ini menghasilkan bahwa sektor yang memiliki keterkaitan ke belakang maupun ke depan yang tinggi adalah sektor-sektor listrik, gas dan air bersih serta sektor pengangkutan dan komunikasi. Hal tersebut menyatakan bahwa input dari sektor listrik, gas dan air bersih serta sektor pengangkutan dan komunikasi menggunakan sebagian besar input yang digunakan untuk proses produksi seperti tenanga kerja, bahan baku, modal, dll yang berasal dari sektor lain yang ada di Kabupaten Pemalang itu sendiri dan output yang dihasilkan, dipasarkan atau digunakan pada sektor-sektor lainnya di Kabupaten Pemalang sebagai input dalam proses produksi. Penelitian yang dilakukan oleh Jannah & Tasriah, (2022) mengenai peranan industri terkait pariwisata di Provinsi Sumatera Barat yang menggunakan analisis input-output memiliki hasil penelitian bahwa sektor unggulan terkait pariwisata adalah industri angkutan darat, industri angkutan udara, industri jasa perusahaan dan industri jasa lainnya. Industri tersebut mampu menarik serta mendorong perekonomian industri lainnya sehingga memengaruhi perekonomian di Sumbar.

Menurut Kalangi (2019) langkah untuk mempelajari model input-output adalah membuat tiga macam matriks utama, yaitu: (1) matriks tranksaksi, (2) matriks koefisien teknis, dan (3) matriks koefisien saling ketergantungan. Adapun penjelasannya sebagai berikut:

1. Matriks Tranksaksi

Tabel dasar dari sistem *input-output* dikenal dengan sebutan sebagai matriks transaksi, di mana nilai dari data yang dimasukan ke dalam matriks transaksi adalah berupa satuan nilai dari berbagai arus ekonomi yang ada dalam suatu perekonomian selama periode tahun dasar tertentu. Dalam menyiapkan matriks ini, perekonomian dibagi dalam sejumlah sektor atau industri yang biasanya didasarkan pada sensus produksi dan klasifikasi statistik nasional lainnya. Agar lebih jelas bentuk dari matriks transaksi ini dapat dilihat pada tabel 1 berikut.

Tabel 1. Matriks Transaksi dalam suatu Perekonomian

Output **Input**	**Sektor Pembelian (kolom)** **Permintaan antara** **sektor**	**Total Permintaan Antara**	**Permintaan akhir**	**Total permintaan akhir**	**Total output**
i =1,2,…,n Sektor Produksi (baris)	x_{11} x_{12} … x_{1n} x_{21} x_{22} … x_{2n} ⋮ , ⋮ ⋮ KUADRAN I ⋮ , ⋮ ⋮ x_{n1} x_{n2} … x_{nn}	W_1 W_2 ⋮ ⋮ ⋮ W_n	C_{11} I_{12} G_{13} E_{14} C_{21} I_{22} G_{23} E_{24} ⋮ , ⋮ ⋮ KUADRAN II ⋮ , ⋮ ⋮ C_{n1} I_{n2} G_{n3} E_{n4}	D_1 D_2 ⋮ ⋮ ⋮ D_n	X_1 X_2 ⋮ ⋮ ⋮ X_n
Total Input Antara	U_1 U_2 … U_j				
i =1,2,…,m	V_{11} V_{12} … V_{1n} V_{21} V_{22} … V_{2n} ⋮ , ⋮ ⋮ KUADRAN I ⋮ , ⋮ ⋮ V_{m1} V_{m2} … V_{mn}		V_{1c} V_{1I} V_{1G} V_{1E} V_{2c} V_{2I} V_{2G} V_{2E} ⋮ , ⋮ ⋮ KUADRAN II ⋮ , ⋮ ⋮ V_{mc} V_{mI} V_{mG} V_{mE}		
Total Input Primer	$\boldsymbol{V_1}$ $\boldsymbol{V_2}$ … $\boldsymbol{V_n}$		$\boldsymbol{V_C}$ $\boldsymbol{V_I}$ $\boldsymbol{V_G}$ $\boldsymbol{V_E}$		**V**
Total Input	$\boldsymbol{X_i}$ $\boldsymbol{X_j}$ … $\boldsymbol{X_n}$		**C I E G D**		**X**

Tabel tersebut dibagi secara vertikal oleh garis tebal menjadi dua bagian, yaitu bagian kiri dan kanan. Bagian kiri mewakili input dan bagian kanan mewakili penjualan terhadap produk akhir yang siap digunakan. Kemudian, setiap subbagian dibagi lagi secara horizontal oleh garis tebal, di mana bagian atas adalah input antara (intermediate input) dan bagian bawah adalah input primer (primary input). Dengan demikian, matriks ini mempunyai empat kuadran. Kuadran pertama terletak di kanan atas: kuadran kedua terletak di kiri atas kuadran ketiga terletak di kiri bawah; dan kuadran keempat terletak di kanan bawah.

Kuadran pertama, berisikan berbagai elemen permintaan akhir (final demand) dari output setiap sektor/industri yang diproduksi. Kuadran kedua, berisikan aliran barang dan jasa yang akan diproduksi lagi oleh setiap industri atau dengan kata lain kuadran ini dinamakan kuadran transaksi antar-industri. Kuadran ketiga sering disebut kuadran nilai tambah yang berisikan input-input primer terhadap sektor-sektor produktif. Dan yang terakhir kuadran keempat atau kuadran pembelian factor langsung, berisikan input-input primer yang digunakan langsung oleh pemakai akhir.

Ciri-ciri penting dari matriks transaksi adalah harus mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama pada kuadran kedua (kuadran transaksi antar-industri). Dengan kata lain, kuadran ini matriks kuadrat (nxn), sedangkan pada kuadran lainnya tidaklah harus matriks kuadrat. Perlu diingat juga bahwa kuadran pertama, kedua, dan ketiga adalah penting dalam perencanaan ekonomi. Sedangkan untuk kuadran keempat tidak begitu penting, tetapi berguna untuk mengukur produk domestik bruto (GDP).

2. Matriks Koefisien Teknis

Setelah dibuat matriks transaksi yang merupakan dasar statistik dari sistem input output dalam suatu perekonomian, maka langkah selanjutnya adalah membuat "matriks koefisien teknis", atau "matriks koefisien input", atau sering disebut juga "matriks struktur biaya. Matriks transaksi pada tabel 1.1 kita sederhanakan, di mana hanya matriks pada kuadran II elemen-elmennya tetap dipertahankan, di kuadran I dibuat menjadi vektor kolom, di kuadran III dibuat menjadi vektor baris, dan di kuadran IV dikosongkan.

Pada tabel 2 terlihat bahwa output yang dihasilkan harus sama dengan input-input dari n sektor (industri) dan juga permintaan akhir dari setiap sektor atau dapat diartikan bahwa penawaran produk sama dengan permintaan. Oleh karena itu, otput X1, X2, ..., Xn harus memenuhi persamaan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + D_1 \\
X_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + D_2 \\
\vdots \quad & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
X_2 &= a_{n1}X_n + a_{n2}X_n + \cdots + a_{nn}X_n + D_n \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Tabel 2. Matriks Transaksi yang Disederhanakan

Sektor Produksi (Output)	**Sektor Pembelian (kolom)**		
Sektor Pemakai (Input)	**Permintaan Antara** **Sektor j = 1,2,…,n**	**Total Permintaan Akhir**	**Total Output**
Sektor Produksi (baris) n = 1,2,3,…,n	x_{11} x_{12} … x_{1n} x_{21} x_{22} … x_{2n} $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	D_1 D_2 $\vdots$	X_1 X_2 $\vdots$

	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $x_{n1} \quad x_{n2} \; \dots \; x_{nn}$	$\vdots$ $\vdots$ D_n	$\vdots$ $\vdots$ X_n
Total Input Primer	$V_1 \quad V_2 \; \dots \; V_n$		
Total Input	$X_1 \quad X_2 \; \dots \; X_n$		

Nilai koefisisen teknis untuk elemen x_{11} (pada baris pertama dan kolom pertama) di kuadran II adalah,

$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1}$ atau secara umum dapat ditulis menjadi,

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \quad \Longrightarrow x_{ij} = a_{ij}X_j \qquad (2)$$

i menunjukkan jumlah baris dan j jumlah kolom. Indeks I menunjukkan input dan indeks j menunjukkan output, sehingga a_{ij} mengartikan bahwa input ke-I yan diperlukan untuk menghasilkan output ke-j seharga satu rupiah. Jadi, bila pernyataan $a_{23} = 0{,}3$ berarti bahwa untuk menghasilkan output dari sektor/industri ke-3 yang bernilai satu rupiah, diperlukan input dari sektor/industri ke-2 uang bernilai 30 sen atau Rp0,3,- atau untuk menghasilkan satu unit output dari industri ke-3 diperlukan 30 persen dari industri ke-2

Matriks koefisien teknis dapat ditulis menjadi suatu matriks baru, yaitu.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Substitusikan persamaan (2) ke dalam persamaan (1), akan diperoleh hasil,

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + D_1 \\ X_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + D_2 \\ \vdots \quad & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ X_2 &= a_{n1}X_n + a_{n2}X_n + \cdots + a_{nn}X_n + D_n \end{aligned}$$

Atau,

$$\begin{aligned} X_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \cdots - a_{1n}X_n &= D_1 \\ X_2 - a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - \cdots - a_{2n}X_n &= D_2 \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad & \vdots \\ X_2 - a_{n1}X_n - a_{n2}X_n - \cdots - a_{nn}X_n &= D_n \end{aligned}$$

Bila koefisien masing-masing variabel X difaktorkan akan diperoleh,

$$\begin{matrix} (1 - a_{11})X_1 & - a_{12}X_2 - & \dots & - a_{1n}X_n = D_1 \\ -a_{21}X_1 & (1 - a_{22})X_2 - & \dots & - a_{2n}X_n = D_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}X_n & - a_{n2}X_n & \dots & (1 - a_{nn})X_n = D_n \end{matrix}$$

Sistem persamaan linear tersebut dapat ditulis ke dalam bentuk matriks seperti berikut ini.

$$\begin{pmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1 - a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$$

Atau dapat ditulis lebih sederhana menjadi,

(I - A)X = D

X = (I – A)$^{-1}$D

di mana:

X = Vektor *output* (Variabel $X_1, X_2, \ldots, X_n$)

D = Vektor permintaan akhir (konstanta)

I = Matriks identitas

A = Matriks koefisien teknis atau matriks koefisien *input*

(I – A) = Matriks teknologi atau matriks Leontief.

3. Matriks Koefisien Saling Ketergantungan

Matriks koefisien saling ketergantungan diperoleh dari matfiks teknologi atau matriks Leontief yang telah diinverskan atau biasa ditulis dengan simbol $(I - A)^{-1}$. Jadi, untuk memperoleh tingkat keseimbangan output X guna memenuhi permintaan akhir dalam suatu perekonomian, maka diperlukan langkah-langkah berikut ini:

a. Buatlah matriks transaksi.

b. Buatlah matriks koefisien teknis/input $(a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j})$.

c. Hitunglah matriks teknologi atau matriks Leontief (I – A).

d. Carilah invers dari matriks teknologi $(I - A)^{-1}$, jika ada.

e. Kalikan matriks invers dengan vektor permintaan akhir D agar memperoleh nilai output X.

Contoh Penerapan Matriks Terhadap Analisis Input-Output

Misalkan telah diketahui matriks transaksi perekonomian Provinsi Sulawesi Utara tahun 2000 yang disederhankan seperti pada tabel 3 berikut:

Tabel 3. Matriks Transaksi Perekonomian Provinsi Sulawesi Utara tahun 2000 yang Disederhankan (Dalam Jutaan Rupiah)

Output	Permintaan Antara			Permintaan Akhir	Total Output
Input	Pertanian	Industri	Jasa dan Lainnya		
Pertanian	2.593	3.563	2.090	9.420	17.666
Industri	1.585	4.072	3.064	6.566	15.287
Jasa dan Lainnya	4.536	1.990	2.485	5.742	14.753
Input Primer	8.952	5.662	7.114		
Total Input	**17.666**	**15.287**	**14.753**		

Sumber: Tim Peneliti Fakultas Ekonomi, UNSRAT, Manado, Tahun 2000.

Tabel 4. Matriks Koefisien Teknis atau Input

Output	Permintaan Antara		
Input	Pertanian	Industri	Jasa dan Lainnya
Pertanian	0,1468	0,2331	0,1417
Industri	0,0897	0,2664	0,2077
Jasa dan Lainnya	0,2568	0,1302	0,1684
Input Primer	0,5067	0,3704	0,4822
Total Input	**1,0000**	**1,0000**	**1,0000**

Matriks koefisien teknis atau input dapat ditulis dalam matriks baru A seperti berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1468 & 0{,}2331 & 0{,}1417 \\ 0{,}0897 & 0{,}2664 & 0{,}2077 \\ 0{,}2568 & 0{,}1302 & 0{,}1684 \end{pmatrix}$$

Ubah ke bentuk matriks teknologi atau Leontief dengan cara mengurangkan matriks identitas (I) dengan matriks koefisien teknis atau input (A) sebagai berikut.

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1468 & 0{,}2331 & 0{,}1417 \\ 0{,}0897 & 0{,}2664 & 0{,}2077 \\ 0{,}2568 & 0{,}1302 & 0{,}1684 \end{pmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 0{,}8532 & -0{,}2331 & -0{,}1417 \\ -0{,}0897 & 0{,}7336 & -0{,}2077 \\ -0{,}2568 & -0{,}1302 & 0{,}8316 \end{pmatrix}$$

Matriks saling ketergantungan atau invers dari matriks Leontief diperoleh dengan menggunakan metode adjoin dan determinan sebagai berikut.

$$|I - A| = 0{,}8532 \begin{vmatrix} 0{,}7336 & -0{,}2077 \\ -0{,}1302 & 0{,}8316 \end{vmatrix} + 0{,}2331 \begin{vmatrix} -0{,}0897 & -0{,}2077 \\ -0{,}2568 & 0{,}8316 \end{vmatrix} - 0{,}1417 \begin{vmatrix} -0{,}0897 & 0{,}7336 \\ -0{,}2568 & -0{,}1302 \end{vmatrix}$$

$|I - A| = 0{,}8532\,(0{,}6101 - 0{,}0270) + 0{,}2331(-0{,}0746 - 0{,}0533) - 0{,}1417(0{,}0117 + 0{,}1884)$

$|I - A| = 0{,}8532\,(0{,}5831) + 0{,}2331(-0{,}1279) - 0{,}1417(0{,}2001)$

$|I - A| = 0{,}4975 - 0{,}0298 - 0{,}0284$

$|I - A| = 0{,}4393$

Matriks kofaktor C adalah,

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0{,}7336 & -0{,}2077 \\ -0{,}1302 & 0{,}8316 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0{,}0897 & -0{,}2077 \\ -0{,}2568 & 0{,}8316 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0{,}0897 & 0{,}7336 \\ -0{,}2568 & -0{,}1302 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0{,}2331 & -0{,}1417 \\ -0{,}1302 & 0{,}8316 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0{,}8532 & -0{,}1417 \\ -0{,}2568 & 0{,}8316 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0{,}8532 & -0{,}2331 \\ -0{,}2568 & -0{,}1302 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0{,}2331 & -0{,}1417 \\ 0{,}7336 & -0{,}2077 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0{,}8532 & -0{,}1417 \\ -0{,}0897 & -0{,}2077 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0{,}8532 & -0{,}2331 \\ -0{,}0897 & 0{,}7336 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}5831 & 0{,}1279 & 0{,}2001 \\ 0{,}2122 & 0{,}6731 & 0{,}1710 \\ 0{,}7524 & 0{,}1899 & 0{,}6050 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj.}\,(I - A) = \begin{pmatrix} 0{,}5831 & 0{,}2122 & 0{,}7524 \\ 0{,}1279 & 0{,}6731 & 0{,}1899 \\ 0{,}2001 & 0{,}1710 & 0{,}6050 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, invers dari matriks Leotief adalah,

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{|I-A|} adj(I - A)$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}4393} \begin{pmatrix} 0{,}5831 & 0{,}2122 & 0{,}7524 \\ 0{,}1279 & 0{,}6731 & 0{,}1899 \\ 0{,}2001 & 0{,}1710 & 0{,}6050 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3273 & 0{,}4830 & 1{,}7127 \\ 0{,}2911 & 1{,}5322 & 0{,}4323 \\ 0{,}4555 & 0{,}3893 & 1{,}3772 \end{pmatrix}$$

Untuk memperoleh nilai-nilai output X,

$X = (I - A)^{-1}D$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3273 & 0{,}4830 & 1{,}7127 \\ 0{,}2911 & 1{,}5322 & 0{,}4323 \\ 0{,}4555 & 0{,}3893 & 1{,}3772 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9.420 \\ 6.566 \\ 5.742 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.508{,}867 \\ 15.284{,}854 \\ 14.754{,}836 \end{pmatrix}$$

Jadi, agar dapat memenuhi tingkat permintaan akhir, yaitu pada sektor pertanian (X1), sektor industri (X2), dan sektor jasa dan lainnya (X3) harus memproduksi barang/output berturut-turut senilai Rp25.508,867 juta, Rp15.284,854 juta.

.

SIMPULAN

Matematika ekonomi merupakan suatu cabang ilmu yang terdapat dalam matematika terapan dan ekonomi, dengan masalah yang disajikan berkaitan dengan masalah-masalah ekonomi yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Penyelesaian masalah yang terdapat dalam matematika ekonomi dapat menggunakan analisis matematika. Matriks adalah studi aljabar yang menawarkan banyak keuntungan tidak hanya untuk aplikasi matematika, tetapi juga untuk bidang matematika lainnya seperti statistik dan angka. Penerapan matriks memungkinkan matematikawan untuk menyederhanakan masalah matematika dengan mudah. Matriks karena itu poin kunci di bidang aljabar. Secara singkat sebuah matriks A dapat dinotasikan sebagai berikut A_(m×n)=[a_ij]_(m×n) atau A=[a_ij]_(m×n). Jenis matrik yaitu matriks identitas, matriks segitiga bawah dan matriks segitiga atas. Terdapat dua operasi pada matriks yaitu Penjumlahan dan Pengurangan Dua Matriks, dan Perkalian Dua Matriks. Suatu fungsi yang daerah asalnya adalah elemen-elemen dari suatu matriks persegi berordo 2 dan wilayah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real merupakan definisi dari determinan matriks (Sessu, 2014). Invers matriks A merupakan matriks yang apabila dikalikan dengan matriks A, maka hasil perkalian antara matriks A dengan inversnya akan menghasilkan matriks identitas, dapat ditulis dengan notasi AA-1 = I (Arif, 2013).

Analisis Input-Ouput (I-O) adalah suatu model matematis untuk menganalisis keterkaitan antar sektor dalam suatu perekonomian. Analisis input-output didasarkan dari gagasan bahwa sistem perekonomian suatu negara terbagi menjadi sejumlah sektor atau industri yang berbeda-beda dan saling berkaitan satu sama lainnya. Menurut Kalangi (2019) langkah untuk mempelajari model input-output adalah membuat tiga macam matriks utama, yaitu: (1) matriks tranksaksi, (2) matriks koefisien teknis, dan (3) matriks koefisien saling ketergantungan.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmad, A. M. (2021). Konsep-Konsep Dasar Matematika dalam Ekonomi. *Mega: Jurnal Pendidikan Matematika*, *2*(1), 77–85.

Aris Hartono, Eko Agus Cahyono Sutomo. "LITERATUR REVIEW ; PANDUAN PENULISAN DAN PENYUSUNAN." *Jurnal Keperawatan*, 2019.

Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra. Canada*. John Wiley \& Sons.

Arif, N. R. al. (2013). *Matematika Terapan Untuk Ekonomi*. Pustaka Setia.

Fauzi Muhammad, Muannif Ridwan Suhar AM, Bahrul Ulum. "Pentingnya Penerapan Literature Reviewpada Penelitian Ilmiah(The Importance Of Application Of Literature Review In Scientific Research." *Jurnal Masohi*, vol. 02, no. 1, 2021, pp. 42-51.

Firmansyah, ., Sugiyanto, F., Purwanti, E. Y., Basuki, M. U., Marwani, ., Kurnia, A. S., & Oktavilia, S. (2020). Pengenalan Teknis Analisis Input-Ouput Untuk Perencanaan Pembangunan Daerah Di Kabupaten Temanggung. *Kumawula: Jurnal Pengabdian Kepada Masyarakat*, *3*(2), 239–245. https://doi.org/10.24198/kumawula.v3i2.27038

Jannah, L. T. W., & Tasriah, E. (2022). Analisis Input-Output: Peranan Industri Terkait Pariwisata di Provinsi Sumatera Barat. *Jurnal Ekonomi Pembangunan (JEP)*, *11*(1), 11–21. https://doi.org/10.23960/jep.v11i1.390

Hidayat, W. (2016). Matematika Ekonomi. UMMPress.

Kalangi, J. B. (2019). *Matematika Ekonomi Dan Bisnis Edisi 4 Buku 1*. Salemba Empat.

Leon, S. J. (2001). Aljabar Linear dan Aplikasinya. *Jakarta: Erlangga*.

Lipschutz. (2004). *Aljabar Linier* (Edisi Keti). Erlangga.

Mesra, B. (2016). Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Deepublish.

Munasiah, M., Solihah, A., & Heriyati, H. (2020). Pemahaman Konsep dan Penalaran Matematika Siswa dalam Pembelajaran Matriks. *SAP (Susunan Artikel Pendidikan)*, *5*(1). https://doi.org/10.30998/sap.v5i1.6231

Okoli, C. & Schabran, K. (2010). A Guide to Connducting a Systematic Literature Review of Information System Research. Sprout: Working papers on Information System, 10(26). http://sprouts.aisnet.org/10-26

Rahayu, Y., Rahayu, Y., & Nurhadiyono, B. (2012). Implementasi Matriks Pada Matematika Bisnis Dan Ekonomi. *Techno.Com*, *11*(2), 74–81.

Sessu. (2014). *Pengantar Matematika Ekonomi*. Jakarta: Bumi Aksara.

Simangunsong, W. (2016). *PKS matematika peminatan kelas XII SMA/MA + bank soal.* Gematama.

Suryani, T. (2013). Analisis Peran Sektor Ekonomi Terhadap Pertumbuhan Ekonomi Kabupaten Pemalang (Analisis Tabel Input Output Kabupaten Pemalang Tahun 2010). *Economics Development Analysis Journal*, *2*(1), 1–9. http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/edaj

Wirawan, N. (2016). *Cara Mudah Memahami Matematika Ekonomi Lanjutan*. Bali: Keraras Emas..